

Devoir en temps libre n°4

Problème I

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, G un sous-groupe fini de $GL(E)$ de cardinal égal à n et soit F un sev stable par tout élément de G , *i.e.*

$$\forall g \in G \quad g(F) \subset F$$

Soit p un projecteur de E tel que $\text{Im } p = F$. On pose $q = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1}$.

1. Établir $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. Montrer que q est un projecteur.
3. Montrer que $\text{Im } q = F$.
4. Montrer qu'il existe un sev H supplémentaire de F et stable par tout élément de G .

Problème II

Soit n entier non nul. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note $S_{n,k}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; k \rrbracket$ (avec la convention $\llbracket 1; 0 \rrbracket = \emptyset$). On pose

$$\tau: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \longmapsto P(X+1) \end{cases}$$

et $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Justifier que τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser $T = \text{mat}_{\mathcal{C}} \tau$.
2. Justifier que τ est un automorphisme et déterminer $\text{mat}_{\mathcal{C}} \tau^{-1}$.
3. Pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, établir $p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} S_{n,k}$
4. Soit $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer $(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

puis déterminer $(u_0, \dots, u_n)$ en fonction de $(v_0, \dots, v_n)$.

5. Déterminer une formule donnant $S_{n,k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Problème III

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et de degré $n \geq 2$.

1. Étudier la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(|P(x)|)$ sur chacun des intervalles composant l'ensemble de définition de cette fonction.

2. En déduire $\forall x \in \mathbb{R} \quad P''(x)P(x) \leq P'(x)^2$

puis $\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad P^{(k+2)}(x)P^{(k)}(x) \leq P^{(k+1)}(x)^2$

3. Pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, majorer $a_{k-1}a_{k+1}$ en fonction de a_k .