

Corrigé du devoir en temps libre n°3

Problème I

1. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$. Pour n entier non nul, on a $P_{n-1} \neq 0$ sans quoi $(P_n)_n$ serait de limite nulle et

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\ell}{\ell}$$

D'où

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

2. Par définition, le produit $\prod(1 + u_n)$ converge si et seulement si $\left(\prod_{k=0}^n u_k\right)_n$ admet une limite finie non nulle, autrement dit, passant au logarithme, si et seulement si $\left(\sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k)\right)_n$ admet une limite finie. Par conséquent, on a

$$\prod(1 + u_n) \text{ converge} \iff \sum \ln(1 + u_n) \text{ converge}$$

Or, on a $\ln(1 + u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors il vient $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on obtient

$$\sum \ln(1 + u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Et on conclut

$$\boxed{\prod(1 + u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}}$$

3. Comme ci-avant, on a

$$\prod(1 - u_n) \text{ converge} \iff \sum \ln(1 - u_n) \text{ converge}$$

On a également $\ln(1 - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors il vient $\ln(1 - u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$. D'après le critère des équivalents pour des séries à termes de signe constant, on obtient

$$\sum \ln(1 - u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Et on conclut

$$\boxed{\prod(1 - u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}}$$

Problème II

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ décroît et tend vers zéro. D'après le théorème des séries alternées, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, le reste } R_n \text{ d'ordre } n \text{ est bien défini.}}$$

2. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient pour n entier

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt = - \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

Avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

il vient $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\ln(2) = S$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = S - S_n = (-1)^{n+1} \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$

On a $t^{n+1} \leq t^n$ pour $t \in [0; 1]$ et n entier d'où la décroissance de $(\varepsilon_n)_n$ par croissance de l'intégrale. On a déjà établi $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et par conséquent, d'après le théorème des séries alternées

La série $\sum R_n$ converge.

Pour n entier, on trouve par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k = - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \right) \frac{dt}{1+t} = - \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{(1+t)^2} dt = -\frac{1}{2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2} dt$$

Comme précédemment, on établit $\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et on conclut

$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\frac{1}{2}$

Problème III

1. On a $\forall n \geq 2 \quad v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$
 $\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O \left(\frac{1}{n^2} \right)$

La série télescopique $\sum_{n \geq 1} [v_n - v_{n-1}]$ converge et d'après le lien suite/série télescopique, on conclut que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge, c'est-à-dire

Il existe γ réel telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2. On a établi $v_n - v_{n-1} = O \left(\frac{1}{n^2} \right)$

La série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et par sommation des relations de comparaison

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} [v_k - v_{k-1}] = \gamma - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)$$

Par comparaison série/intégrale (à détailler), on obtient

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

d'où

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Ainsi

$$v_n = \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$3. \text{ On a } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \underbrace{(-1)^n \left(\frac{\ln(n) + \gamma}{\sqrt{n}} \right)}_{\alpha_n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ est alternée avec $|\alpha_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Posons $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$. La fonction f est dérivable avec

$$\forall t > 0 \quad f'(t) = \frac{2 - \ln(t)}{2t\sqrt{t}}$$

La fonction f décroît sur $[e^2; +\infty[$ et par conséquent, la suite $(|\alpha_n|)_{n \geq e^2}$ avec $|\alpha_n| = f(n) + \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$ pour n entier non nul décroît elle-aussi. Ainsi, à partir d'un certain rang, le théorème des séries alternées garantit la convergence de $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$. La série $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge absolument d'après le critère de Riemann et on conclut

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}$$