

Feuille d'exercices n°07

Exercice 1 (*)

Nature de la série de terme général :

1. $e^{-\sqrt{\ln(n)}}$

2. $\ln(\operatorname{th}(n))$

3. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Corrigé : 1. On a $\sqrt{\ln(n)} \leq \ln(n)$ pour $n \geq 3$ d'où

$$\forall n \geq 3 \quad e^{-\sqrt{\ln(n)}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

Par comparaison

La série $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ diverge.

2. On a $\operatorname{th}(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ d'où

$$\ln(\operatorname{th}(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \operatorname{th}(n) - 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{th}(n) - 1 = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} - 1 = \frac{-2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2e^{-2n}$$

d'où

$$\ln(\operatorname{th}(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2e^{-2n}$$

La série $\sum -2e^{-2n}$ converge en tant que série géométrique de raison e^{-2} et d'après le critère des équivalents (licite, signe constant), on conclut

La série $\sum_{n \geq 1} \ln(\operatorname{th}(n))$ converge.

Remarque : On peut aussi rédiger

$$\ln(\operatorname{th}(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-2n})$$

Par comparaison à une série géométrique, on obtient la convergence absolue et donc la convergence.

3. On a $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \left(e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \right) = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs et d'après le critère de Riemann, on conclut

La série $\sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ converge.

Remarque : On peut aussi rédiger

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut à la convergence absolue et donc la convergence.

Exercice 2 (**)

Nature de la série de terme général :

$$1. \frac{\sum_{k=1}^n k!}{(n+1)!}$$

$$2. \operatorname{th}(n)^n$$

$$3. \frac{\ln(n)^n}{n!}$$

Corrigé : 1. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

La série $\sum u_n$ diverge.

$$2. \text{ On a } n \ln(\operatorname{th}(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(\operatorname{th}(n) - 1) = \frac{-2ne^{-n}}{e^n + e^{-n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2ne^{-2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{d'où } \operatorname{th}(n)^n = e^{n \ln(\operatorname{th}(n))} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

La série $\sum \operatorname{th}(n)^n$ diverge grossièrement.

3. Avec l'équivalent de Stirling, on a

$$\frac{\ln(n)^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\begin{aligned} \text{et } n^2 \ln(n)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} &= \exp \left[2 \ln(n) + n \ln(\ln(n)) + n - n \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \right] \\ &= \exp [-n \ln(n)(1 + o(1))] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \frac{\ln(n)^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)^n}{n!}$ converge.

Variante : On peut procéder sans l'équivalent de Stirling. Notant $u_n = \frac{\ln(n)^n}{n!}$ pour n entier non nul, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

$$\text{et } \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n = \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right] = \exp \left(\frac{1}{\ln(n)} (1 + o(1)) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\text{d'où } \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

On conclut avec le critère de d'Alembert.

Exercice 3 (**)

Nature de la série de terme général :

$$1. \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$$

$$2. \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$$

$$3. \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$$

Corrigé : 1. Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + O(u^2)$, on trouve

$$\begin{aligned} u_n &= \sin(\pi\sqrt{1+n^2}) = \sin\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right) \\ &= \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ u_n &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\pi}{2n}$ converge car vérifie le critère des séries alternées et la série $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge par critère de Riemann. Ainsi

La série $\sum \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$ converge.

2. Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + O(u^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}_{v_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{w_n} \end{aligned}$$

La série $\sum v_n$ est alternée avec $(|v_n|)_n$ décroissante de limite nulle d'où sa convergence et $\sum w_n$ converge par comparaison et critère de Riemann. On conclut

La série $\sum [\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}]$ converge.

Remarque : On peut même calculer sa somme en considérant par exemple la somme partielle

$\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$ avec n entier et en séparant les termes d'indices pairs et impairs.

3. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \left[(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k \right] = 2 \underbrace{\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k}_{= N_n \in \mathbb{N}}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n) = \sin(2\pi N_n - \pi(2-\sqrt{3})^n) = -\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$$

D'où, avec $|\sin(u)| \leq |u|$ pour u réel, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq \pi(2-\sqrt{3})^n$$

Enfin, on a $1 < 3 < 4$ d'où $0 < 2-\sqrt{3} < 1$. Par comparaison à une série géométrique de raison dans $]0; 1[$, on conclut

La série $\sum \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge absolument.

Exercice 4 (*)

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

Corrigé : Si $\beta \leq 0$, on a $\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$

d'où la divergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ par comparaison. Pour $\beta > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^\beta}$ est continue, décroissante, positive sur $[2; +\infty[$ donc, par comparaison série/intégrale, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^\beta}$. Enfin, avec le changement $u = \ln(t)$, les intégrales $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^\beta}$ et $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$ sont de même nature. Ainsi, avec le critère de Riemann, on conclut

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 5 (*)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} - \ln(\ln(n))$.

Corrigé : Soit $n \geq 2$. Avec le développement usuel $\ln(1+u) = u + O(u^2)$, on trouve

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n \ln(n)} - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(n-1)) = \frac{1}{n \ln(n)} + \ln\left(\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) - \ln(\ln(n)) \\ &= \frac{1}{n \ln(n)} + \ln\left(1 - \frac{1}{n \ln(n)} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 3} [u_n - u_{n-1}]$ converge et d'après le lien suite/série télescopique, on conclut

La suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 6 (**)

Soit $\alpha > 0$. Nature des séries de terme général :

$$1. \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \qquad 2. \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha} \qquad 3. \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

Corrigé : 1. On a

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} - \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées. Puis

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2\alpha}} < 0$$

Ainsi, d'après le critère des équivalents (licite, signe constant à partir d'un certain rang) et le critère de Riemann, on a

$$\sum w_n \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

On conclut

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2. Pour n entier non nul, on a d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann appliqué à la fonction $t \mapsto t^\alpha$ continue sur $[0; 1]$

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = n^{\alpha+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

D'où

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut

La série $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$.

3. On a

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{u_n} - \underbrace{\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées. Puis

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$$

Ainsi, d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on a

$$\sum w_n \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

On conclut

La série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) \, dt$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ puis la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) \, dt$.

Corrigé : La fonction f est décroissante de limite nulle donc positive. Avec le changement de variables $u = t - n\pi$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u + n\pi) \, du = (-1)^n \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u) \, du$$

La série $\sum u_n$ est donc alternée. Par décroissance de f , on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^\pi f(u + (n+1)\pi) \sin(u) \, du \leq \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u) \, du$$

et
$$0 \leq \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u) \, du \leq \int_0^\pi f(n\pi) \, du = \pi f(n\pi) = o(1)$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ vérifie le critère des séries alternées et par conséquent

La série $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) \, dt$ converge.

Soit $x \geq 0$. Pour n entier, on a

$$n\pi \leq x < (n+1)\pi \iff n = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$$

Notons $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$. Comme $n_x\pi > x - \pi$, on a $n_x\pi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Puis

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt - \int_0^{n_x\pi} f(t) \sin(t) \, dt \right| &= \left| \int_{n_x\pi}^x f(t) \sin(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_{n_x\pi}^x f(t) \, dt \leq (x - n_x\pi) f(n_x\pi) \leq \pi f(n_x\pi) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et
$$\int_0^{n_x\pi} f(t) \sin(t) \, dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} u_k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt$ tend vers la même limite pour $x \rightarrow +\infty$ et on conclut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) \, dt$$

Exercice 8 (*)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad 2. \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

Corrigé : 1. On a $\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'après le lien suite/série télescopique, on conclut

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1$.

2. La série $\sum \left(\frac{e^i}{2}\right)^n$ converge absolument puisque $\sum \left|\frac{e^i}{2}\right|^n = \sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente. On trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^i}{2}\right)^n = \frac{e^i}{2 - e^i} = \frac{e^i(2 - e^{-i})}{(2 - \cos(1))^2 + \sin^2 1} = \frac{2e^i - 1}{5 - 4\cos(1)}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La s\'erie } \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{2^n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n} = \frac{2 \cos(1) - 1}{5 - 4 \cos(1)}}$$

Exercice 9 (**)

V\'erifier la convergence puis calculer la somme des s\'eries suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \qquad 2. \sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Corrig\'e : 1. Soit $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n [\ln(k-1) - \ln(k)] + \sum_{k=2}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] \\ \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \ln(n+1) - \ln n - \ln(2) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln(2) \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La s\'erie } \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln(2)}}$$

2. La s\'erie $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est altern\'ee et v\'erifie le crit\ere des s\'eries altern\'ees puisque la suite $\left(\frac{1}{3n+1} \right)_n$ d\'ecro\it et tend vers z\'ero. Pour n entier, en observant $\frac{1}{3k+1} = \int_0^1 t^{3k} dt$ pour k entier, il vient par lin\'earit\'e de l'int\'egrale

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{3k} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{1 - (t^3)^{n+1}}{1 + t^3} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^3} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3(n+1)}}{1 + t^3} dt$$

$$\text{Puis} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{3(n+1)}}{1 + t^3} dt \leq \int_0^1 t^{3(n+1)} dt = \frac{1}{3n+4}$$

$$\text{Ainsi} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^3}$$

Apr\es d\'ecomposition en \'elements simples, on trouve

$$\forall t \in [0; 1] \qquad \frac{1}{1 + t^3} = \frac{1}{(1+t)(t^2 - t + 1)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2 - t + 1} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Puis} \quad \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^3} &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2t-1}{t^2 - t + 1} - \frac{3}{(t-1/2)^2 + 3/4} \right] dt \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \left[\ln(|t^2 - t + 1|) - 2\sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t - 1/2) \right) \right]_0^1 \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La s\'erie } \sum \frac{(-1)^n}{3n+1} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)}}$$

Exercice 10 (**)

1. Montrer $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

2. Convergence puis somme de la série $\sum_{n \geq 1} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$

Corrigé : 1. Par trigonométrie, on trouve pour $(a, b) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[^2$ tel que $a - b \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Comme $\text{Arctan}(\tan(u)) = u$ pour tout $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, il s'ensuit

$$\text{Arctan}(\tan(a - b)) = a - b = \text{Arctan}\left(\frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}\right)$$

On a également $\tan(\text{Arctan}(u)) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on choisit $a = \text{Arctan}(x)$ et $b = \text{Arctan}(y)$. Les conditions précédentes sur a et b sont bien vérifiées avec en particulier

$$-\frac{\pi}{2} < -\text{Arctan}(y) \leq \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y) \leq \text{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en appliquant les relations précédemment obtenues, on trouve

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)}$$

2. On a pour n entier

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{n+1-n}{1+n(n+1)}\right) = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan } n$$

Il s'agit donc d'une série télescopique et comme $\text{Arctan}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 11 (**)

Nature des séries de terme général :

1. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\text{th}(k)}{k\sqrt{k}}$

2. $(-1)^n \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

3. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}$

Corrigé : 1. On a

$$\frac{\text{th}(n)}{n\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Par sommation de relation de comparaison, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\text{th}(k)}{k\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

Par comparaison série/intégrale, on a pour n entier non nul

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$$

Ainsi

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\text{th}(k)}{k\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Et on conclut

La série $\sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\text{th}(k)}{k\sqrt{k}}$ diverge.

2. Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d'où l'équivalent

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, on a par sommation de relation de comparaison

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(\sqrt{n})$$

Par suite

$$(-1)^n \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Ainsi

La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ converge absolument.

3. Par comparaison série/intégrale, on a pour n entier non nul

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2}$$

Avec le changement de variable $u = \ln t$, on trouve

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\ln(n)}$$

Par suite

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$$

Par convexité, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n-1}$$

Par comparaison, on conclut

La série $\sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}$ diverge.

Exercice 12 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \ln(e - 1 + u_n)$ pour n entier.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.

Corrigé : 1. On pose $f(x) = \ln(e - 1 + x)$ pour $x \geq 1$. La fonction f croît et on a

$$\forall x \geq 1 \quad f(x) \leq x \iff e - 1 + x \leq e^x \iff x \geq 1$$

après une étude rapide de fonction. Une récurrence immédiate donne $(u_n)_n$ minorée strictement par 1 et on a $(u_n)_n$ monotone et donc décroissante et d'après le théorème limite monotone, la suite $(u_n)_n$ converge. La limite ℓ est point fixe de la fonction f continue sur $[1; +\infty[$ et $f(x) = x \iff x = 1$ d'où

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1}$$

2. La série $\sum (u_n - 1)$ est à termes strictement positifs d'après l'étude précédente. La fonction f est dérivable et on trouve

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{f(u_n) - f(1)}{u_n - 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f'(1) = e^{-1} < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum (u_n - 1) \text{ converge.}}$$

Variante : La fonction f est dérivable sur $[1; +\infty[$ avec

$$\forall x \geq 1 \quad f'(x) = \frac{1}{e - 1 + x}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il vient

$$\forall (x, y) \in [1; +\infty[^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq e^{-1} |x - y|$$

$$\text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - 1| \leq e^{-1} |u_n - 1|$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 1| \leq e^{-n} |u_0 - 1|$$

On conclut que la suite $(u_n)_n$ et la série $\sum (u_n - 1)$ convergent.