

Feuille d'exercices n°08

Exercice 1 (***)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin(2\pi n!e)$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

Corrigé : 1. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$$

d'où

$$2\pi n!e = 2\pi \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$\sin(2\pi n!e) = \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n}$$

D'après le critère des équivalents, licite puisqu'un des termes est de signe constant (donc l'autre aussi à partir d'un certain rang), on conclut

La série $\sum \sin(2\pi n!e)$ diverge.

2. Soit n entier non nul. On pose $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ pour $t \geq 0$. On a $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^{2n}}$. Par comparaison et critère de Riemann, il s'ensuit que $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge pour tout entier n non nul. La fonction $\varphi : \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow]1; +\infty[$, $u \mapsto \tan u$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante. Par théorème, les intégrales $\int_1^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} u du$ sont de même nature donc convergentes et égales. Par décroissance de $\cos$ sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$, il vient

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} u du \leq \frac{\pi}{4} \times \cos^{2(n-1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, on conclut

La série $\sum_{n \geq 1} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ converge.

Variante : La « masse » de l'intégrale est concentrée autour de 1. Majorons finement l'intégrande en 1 avec $1+t^2 \geq 2t$ pour $t \geq 1$ (égalité en $t=1$). On obtient

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2^n t^n} = \frac{1}{2^n(n-1)} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Par comparaison, on conclut à la convergence de la série.

3. Soit n entier non nul. On pose $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^3)^n}$ pour $t \geq 0$. On a $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{t^{3n}}$. Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge pour tout entier n non nul. Puis on a

$$\forall n \geq 1 \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \geq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} \geq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Par comparaison

La série $\sum \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ diverge.

Exercice 2 (***)

Montrer
$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Corrigé : On pose
$$\forall t > 0 \quad f(t) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor$$

Le fait que f soit continue par morceaux sur $]0; 1]$ n'est pas complètement évident. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \left] \frac{1}{(n+1)^2}; \frac{1}{n^2} \right] \quad f(t) = n$$

Soit $[a; b] \subset]0; 1]$. Déterminons l'intervalle de la forme $\left] \frac{1}{(n+1)^2}; \frac{1}{n^2} \right]$ avec n entier non nul contenant a . On a

$$\frac{1}{(n+1)^2} < a \leq \frac{1}{n^2} \iff n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{a}} \right\rfloor$$

Ainsi
$$\forall t \in [a; b] \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{a}} \right\rfloor} k \mathbf{1}_{\left] \frac{1}{(k+1)^2}; \frac{1}{k^2} \right]}(t)$$

Cette dernière écriture justifie que f est continue par morceaux sur $[a; b]$ et ceci vaut pour tout segment inclus dans $]0; 1]$ d'où $f \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1], \mathbb{R})$. On a

$$\forall t \in]0; 1] \quad 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $]0; 1]$. Soit n entier non nul. On a

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \sum_{k=1}^n k \mathbf{1}_{\left] \frac{1}{(k+1)^2}; \frac{1}{k^2} \right]}(t) dt = \sum_{k=1}^n k \int_{\frac{1}{(k+1)^2}}^{\frac{1}{k^2}} dt = \sum_{k=1}^n k \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\forall k \geq 1 \quad \frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Par suite
$$\int_{\frac{1}{n^2}}^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \right] = 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}$$

Faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on conclut

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

et soit $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$.

1. Si $\alpha > 1$, choisir $\beta \in]1; \alpha[$, comparer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.
2. Compléter l'étude pour $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

Corrigé : 1. On a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underbrace{\frac{\alpha - \beta}{n}}_{>0} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par suite, il existe N entier non nul tel que

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

d'où
$$\forall n \geq N \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$ décroît et par conséquent

$$\forall n \geq N \quad u_n \leq \frac{u_N}{v_N} \times v_n = O(v_n)$$

Comme $\beta > 1$, la série $\sum_{n \geq N} v_n = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\beta}$ converge par critère de Riemann et par comparaison, on obtient

$$\text{Si } \alpha > 1, \text{ la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}$$

Variante : Sans passer par la décroissance de la suite des quotients, avec un produit télescopique, on obtient

$$\forall n \geq N \quad u_n = u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u_N}{v_N} \times v_n$$

On conclut comme ci-avant.

2. Si $\alpha < 1$, on choisit $\beta = 1$ et en procédant comme au 1., il existe $N \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

puis
$$\forall n \geq N \quad \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$ croît et par conséquent

$$\forall n \geq N \quad v_n \leq \frac{v_N}{u_N} \times u_n = O(u_n)$$

La série $\sum_{n \geq N} v_n = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et par comparaison, on conclut

$$\text{Si } \alpha < 1, \text{ la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge.}$$

3. Considérons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n \ln(n)^2}$ pour $n \geq 2$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^{-2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{2}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or, la série harmonique $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge et la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge. Ainsi

$$\text{On ne peut rien dire si } \alpha = 1.$$

Remarque : Le critère établi dans cet exercice s'intitule *critère de Raabe-Duhamel*. On peut observer qu'il précise le cas litigieux de la limite égale à 1 dans le critère de d'Alembert.

Exercice 4 (**)

Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pour n entier avec $A_0 = 0$ pour convention.

1. Montrer

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

2. Application : pour θ réel, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Corrigé : 1. Soit n entier. On a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n [A_k - A_{k-1}] b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k [b_{k+1} - b_k]$$

Remarque : Il s'agit de la *transformation d'Abel* qui est l'homologue discret de l'intégration par parties pour des sommes.

2. Soit θ réel. Si on a $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, le résultat est immédiat puisque $\sin(n\theta) = 0$ pour tout n entier. Supposons $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$ pour n entier. En lui appliquant la transformation d'Abel, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{n} T_n(\theta) - \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\theta) \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \quad \text{avec} \quad T_k(\theta) = \sum_{j=1}^k \sin(j\theta)$$

Puis
$$T_n(\theta) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \implies |T_n(\theta)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

ce qui prouve que la suite $(T_n(\theta))_n$ est bornée. Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k} = O\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

D'après le critère de Riemann, on conclut que

Pour θ réel, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge.

Remarque : On peut calculer sa somme en utilisant des résultats issus de la théorie des *séries de Fourier* mais on peut également procéder de manière élémentaire ...

Exercice 5 (****)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : On a $(u_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $[-1; 1]$, intervalle stable par $\sin$. On peut supposer $u_1 \geq 0$ quitte à poser $v_n = -u_n$ si cette condition n'est pas satisfaite. Alors, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans $[0; 1]$, intervalle stable par $\sin$. Comme $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$, on en déduit la décroissance de la suite puis sa convergence par limite monotone. Notant $\ell \in [0; 1]$ sa limite, il vient par continuité de $\sin$ que $\ell = \sin(\ell)$ et donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par récurrence immédiate, si $u_1 = 0$ alors $(u_n)_{n \geq 1}$ stationne à 0 et si $u_1 > 0$, alors $u_n \geq 0$ pour tout n entier non nul. Un développement limité donne

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

L'idée est de faire apparaître une expression télescopique ayant une limite finie non nulle. Puis

$$u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}$$

C'est une expression télescopique mais de limite nulle. Pour avoir une limite finie non nulle, on pourrait diviser par u_n^3 ce qui donnerait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n^3} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{6}$$

Mais cette dernière expression n'est plus télescopique. On adapte l'idée en considérant

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin(u_n)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2} = \frac{u_n^2 - u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^2}{u_n^4 + o(u_n^4)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

D'après le théorème de Césaro, il vient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

On conclut

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$$

Remarque : On a présenté de manière empirique le critère consistant à chercher un α réel tel que la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_n$ admette une limite finie non nulle.

Exercice 6 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases}.$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Corrigé : On a $u_n > 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. La fonction Arctan est croissante et une étude de fonction permet d'établir $\text{Arctan}(x) \leq x$ pour $x \geq 0$ d'où la décroissance de la suite $(u_n)_n$. D'après le théorème de limite monotone, il s'ensuit que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \geq 0$. La fonction Arctan étant continue sur $[0; +\infty[$, la limite ℓ est point fixe de Arctan et une étude permet d'établir pour $x \geq 0$

$$\text{Arctan}(x) = x \iff x = 0$$

D'où

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

Déterminons α réel tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_n$ admette une limite finie non nulle. Soit n entier. Avec le développement usuel $\text{Arctan}(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\text{Arctan}(u_n))^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha \left[\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)^\alpha - 1 \right] \\ &= u_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{3} + o(u_n^2) - 1\right) = u_n^{\alpha+2} \left(-\frac{\alpha}{3} + o(1)\right) \end{aligned}$$

On choisit $\alpha = -2$ et on obtient
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2}{3}$$

D'après le théorème de Césaro, il vient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2}{3}$$

d'où $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{3}$ et avec $\frac{1}{u_0^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$, on trouve

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

Variante : On peut aussi envisager l'étude de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Pour n entier, on a

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{3} < 0$$

D'après le critère des équivalents licite pour des séries à termes négatifs, les séries $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature. D'après le lien suite/série télescopique, comme $\ln u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$, la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge et par conséquent la série $\sum u_n^2$ diverge. Enfin, comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on dispose d'un seuil N entier tel que $u_n \leq 1$ pour $n \geq N$ et il vient

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq u_n^2 \leq u_n$$

Par comparaison, on retrouve la divergence de $\sum u_n$. Cette technique répond à la question sans fournir d'équivalent du terme général.

Exercice 7 (***)

Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$ pour n entier.

1. Préciser la monotonie puis le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. On a clairement $(x_n)_n$ croissante. Supposons qu'il existe $\ell \geq 1$ tel que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$. Par continuité, il vient $\ell = \ell + e^{-\ell}$ ce qui est absurde. La suite $(x_n)_n$ est donc croissante non convergente d'où

$$\text{La suite } (x_n)_n \text{ est croissante avec } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

2. Soit n entier. On a

$$e^{x_{n+1}} = \exp(x_n + e^{-x_n}) = e^{x_n} (1 + e^{-x_n} + o(e^{-x_n})) = e^{x_n} + 1 + o(1)$$

d'où

$$e^{x_{n+1}} - e^{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

La série à termes positifs $\sum 1$ diverge et par sommation des relations de comparaison, il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} [e^{x_{k+1}} - e^{x_k}] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

d'où

$$e^{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n(1 + o(1))$$

puis

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \ln(1 + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n))$$

On conclut

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Remarque : Comme la croissance de la suite $(x_n)_n$ est très faible, on cherche à l'amplifier pour réussir à la détecter d'où le choix de considérer $(e^{x_n})_n$. On peut aussi voir $x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n+1-n}$ comme une dérivée discrète et la version continue serait alors $x'(t) = e^{-x(t)}$ ce qui qui équivaut à $\frac{d}{dt} [e^{x(t)}] = 1$ et motive de nouveau le fait de considérer $(e^{x_n})_n$.

Exercice 8 (****)

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries complexes convergentes de sommes respectives A et B. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k$$

Montrer $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$

Corrigé : On montre un premier résultat auxiliaire. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites complexes convergentes de limites respectives α et β . On a

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n [u_k v_{n-k} - \alpha \beta] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_{n-k} (u_k - \alpha) + \frac{\alpha}{n+1} \sum_{k=0}^n (v_{n-k} - \beta)$$

La deuxième somme est clairement de limite nulle d'après le théorème de Césaro. La suite $(v_n)_n$ étant convergente, on dispose de $M \geq 0$ tel que $|v_n| \leq M$ pour tout n entier. Il vient par inégalité triangulaire et recours au théorème de Césaro

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_{n-k} (u_k - \alpha) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M |u_k - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \beta}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

Soient n et N entiers. Il vient en changeant l'ordre de sommation

$$C_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \left(a_i \sum_{k=i}^n b_{k-i} \right) = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} B_k$$

d'où

$$\sum_{n=0}^N C_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_{n-k} B_k = \sum_{k=0}^N \left(B_k \sum_{n=k}^N a_{n-k} \right) = \sum_{k=0}^N A_{N-k} B_k$$

Avec le résultat préliminaire, on conclut

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k = \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n A_{n-k} B_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB}$$