

Feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g \in \text{GL}(E)$.

Montrer $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$ et $E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$

Corrigé : On a $E = \text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g \implies \text{Im } f + \text{Im } g = E$

Puis, d'après la formule de Grassmann, on a

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \geq \dim \text{Im } f + \text{Im } g = \dim E$$

Par ailleurs, comme $g \circ f = 0$, alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ puis le théorème du rang donne

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker } f \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

En particulier, on a $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim \text{Im } f + \text{Im } g$

et toujours avec la formule de Grassmann, on conclut

$$\boxed{\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E \quad \text{et} \quad E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g}$$

Exercice 2 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

2. Justifier que $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ sans utiliser $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Corrigé : 1. La famille $\mathcal{B}$ étant une base, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe une unique forme linéaire e_i^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ et par conséquent

$\boxed{\text{Il existe une unique famille } (e_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n \text{ telle que } e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} \text{ pour tout } (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2.}$

2. Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il vient

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \right) (e_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,k} = \alpha_k = 0$$

ce qui prouve la liberté de la famille. Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Sans difficulté, on vérifie que la forme $f - \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^*$ s'annule sur la base $\mathcal{B}$ ce qui prouve sa nullité et donc le caractère générateur de $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ pour $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On conclut

$\boxed{\text{La famille } (e_i^*)_{1 \leq i \leq n} \text{ est une base de } \mathcal{L}(E, \mathbb{K}).}$

Remarque : La base $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est appelée *base duale* de la base $\mathcal{B}$. On en déduit notamment l'égalité fondamentale

$$\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E . On pose

$$\Phi: \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Φ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *antéduale* à $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Corrigé : 1. On a clairement $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$. Supposons l'application Φ non surjective. Il existe alors un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ contenant $\text{Im } \Phi$ ce qui équivaut à l'existence de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaires non tous nuls tels que

$$\forall x \in E \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) = 0_E$$

autrement dit $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = 0$ et contredit la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Par conséquent, l'application Φ est surjective entre deux espaces de même dimension d'où

L'application Φ est un isomorphisme.

Variante : Soit $x \in \text{Ker } \Phi \setminus \{0_E\}$. On peut compléter (x) en base de E et considérer la forme linéaire φ qui envoie un vecteur sur la première coordonnée dans cette base. On a donc $\varphi(x) = 0$ alors que $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et que $\varphi_i(x) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\varepsilon_j \in E$ tel que $\Phi(\varepsilon_j) = e_j$, c'est-à-dire $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On conclut

Il existe une base antéduale à $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Exercice 4 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul, $A \in E$. Résoudre en l'inconnue $X \in E$ l'équation

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \tag{L}$$

Corrigé : Soit X solution de (L). On a

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \implies \text{Tr}(X + X^\top) = \text{Tr}(X) \times \text{Tr}(A) \implies \text{Tr}(X)(2 - \text{Tr}(A)) = 0$$

- Si $\text{Tr}(X) = 0$, alors $X + X^\top = 0$ d'où $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et réciproquement, une matrice antisymétrique est solution de (E).
- Si $\text{Tr}(X) \neq 0$, alors $\text{Tr}(A) = 2$. On pose

$$\forall X \in E \quad \varphi(X) = \frac{1}{2}(X + X^\top)$$

Par analyse/synthèse, on a la décomposition de $X \in E$ dans la somme directe $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$X = \underbrace{\frac{1}{2}(X + X^\top)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(X - X^\top)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

Il s'ensuit que φ est le projecteur sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \iff \varphi(X) = \frac{\text{Tr}(X)}{2}A$$

Comme $\text{Tr}(X) \neq 0$, on a $A \in \text{Im } \varphi = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'après les propriétés d'un projecteur,

$$\varphi\left(\frac{\text{Tr}(X)}{2}A\right) = \frac{\text{Tr}(X)}{2}A$$

Il s'ensuit
$$\varphi(X) = \frac{\text{Tr}(X)}{2}A \iff X - \frac{\text{Tr}(X)}{2}A \in \text{Ker } \varphi = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

D'où
$$X = \lambda A + B \quad \text{avec} \quad (\lambda, B) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Réciproquement, on a

$$\forall (\lambda, B) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(\lambda A + B) = \lambda A = \frac{\text{Tr}(\lambda A + B)}{2}A$$

Notant S_E l'ensemble des solutions de E, on conclut

Si $\text{Tr}(A) \neq 2$ ou $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $S_L = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et sinon $S_L = \{\lambda A + B, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \text{GL}(E)$ et p projecteur de E tel que $u = v \circ p$.

Corrigé : Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$. On dispose de P et Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_r Q$ d'où $A = PQQ^{-1}J_r Q$. On a $PQ \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q^{-1}J_r Q$ semblable à J_r ce qui prouve qu'il s'agit d'une matrice de projection. Considérant v et p dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\text{mat}_{\mathcal{B}} v = PQ$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}} p = Q^{-1}J_r Q$, on conclut

Il existe $v \in \text{GL}(E)$ et p projecteur tel que $u = v \circ p$.

Variante : Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ et S' un supplémentaire de $\text{Im } u$. Les sev $\text{Ker } u$ et S' ont même dimension donc sont isomorphes. Soit $\varphi : \text{Ker } u \rightarrow S'$ un tel isomorphisme. On note p le projecteur sur S parallèlement à $\text{Ker } u$ et on pose $v = u \circ p + \varphi \circ (\text{id} - p)$. On a clairement $v \circ p = u$ puis, pour $x \in E$

$$\begin{aligned} v(x) = 0_E &\iff \underbrace{u(p(x))}_{\in \text{Im } u} + \underbrace{\varphi \circ (\text{id} - p)(x)}_{\in S'} = 0_E \\ &\implies u(p(x)) = 0_E \quad \text{et} \quad \varphi \circ (\text{id} - p)(x) = 0_E \end{aligned}$$

$$v(x) = 0_E \implies p(x) \in \text{Ker } u \quad \text{et} \quad (\text{id} - p)(x) = 0_E$$

Il en résulte que $p(x) = 0_E$ et $x - p(x) = 0_E$ d'où $x = 0_E$. Comme v est un endomorphisme injectif en dimension finie, on conclut

Il existe $v \in \text{GL}(E)$ et p projecteur tel que $u = v \circ p$.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u admet au moins deux sev stables.
2. On suppose u non nul et non injectif.

- (a) Montrer que u admet au moins trois sev stables.
- (b) Si $\dim E$ est impaire, montrer que u admet au moins quatre sev stables.
- (c) Donner un exemple d'endomorphisme qui admet exactement trois sev stables.

Corrigé : 1. $\{0_E\}$ et E sont des sev stables.

2.(a) On a $\text{Ker } u \neq \{0_E\}$ et $\text{Ker } u \neq E$. Par ailleurs, on a sans difficulté $u(\text{Ker } u) \subset \text{Ker } u$. Ainsi

L'endomorphisme u admet au moins trois sev stables.

2.(b) De même, on vérifie que $\text{Im } u$ est stable par u . D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \text{Im } u = \dim E - \dim \text{Ker } u < \dim E$$

et $\text{Im } u \neq \{0_E\}$ puisque u non nul. Enfin, si $\text{Ker } u = \text{Im } u$, alors $\dim E = 2 \text{rg}(u)$ est paire ce qui est faux. Par conséquent

Les sev $\{0\}$, E , $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont quatre sev stables distincts.

2.(c) On a va précisément choisir u tel que $\text{Ker } u = \text{Im } u$. On considère u canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E . On pose

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

Montrer Φ surjective $\iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre

Corrigé : Supposons Φ surjective. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$. On note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par surjectivité, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $x_i \in E$ tel que $\Phi(x_i) = e_i$. Par suite

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\varphi_i(x_k)}_{\delta_{i,k}} = \alpha_k = 0$$

d'où la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Supposons φ non surjective. On a donc $\text{rg } \Phi < n$. Par conséquent, on peut trouver un hyperplan H de $\mathbb{K}^n$ contenant $\text{Im } \Phi$. On dispose de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que H est décrit par l'équation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. Comme $\text{Im } \Phi \subset H$, on a

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) = 0$$

d'où $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$

ce qui prouve le caractère lié de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On conclut

Φ surjective $\iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre

Exercice 8 (****)

Soit n entier non nul et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\text{rg } M = 1$, alors $M^2 = \text{Tr}(M)M$.

Dans ce qui suit, on suppose que M vérifie la relation $M^2 = \text{Tr}(M)M$.

2. Si $\text{Tr}(M) \neq 0$, montrer que $\text{rg}(M) = 1$. On pourra considérer $A = \frac{1}{\lambda}M$ avec $\lambda = \text{Tr}(M)$.
3. Si $\text{Tr}(M) = 0$, décrire les classes de similitude de M .

Corrigé : 1. Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $M = (y_1 X | \dots | y_n X) = XY^\top$ avec Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Puis, avec l'associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = (XY^\top)(XY^\top) = X \underbrace{(Y^\top X)}_{\in \mathbb{K}} Y^\top = (Y^\top X)M$$

Or, d'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(XY^\top) = \text{Tr}(Y^\top X) = Y^\top X$$

Ainsi

$$\boxed{M^2 = \text{Tr}(M)M}$$

2. On suppose $\text{Tr}(M) \neq 0$ et on note $\lambda = \text{Tr}(M)$ et $A = \frac{1}{\lambda}M$. On observe

$$A^2 = \frac{1}{\lambda^2}M^2 = \frac{1}{\lambda^2}\lambda M = A$$

La matrice A est donc matrice de projecteur. Or, pour un projecteur, en considérant une base adaptée à celui-ci, on obtient que son rang est égal à sa trace et on a clairement $\text{Tr}(A) = 1$. On en déduit $\text{rg}(A) = 1$ et pour $M = \lambda A$ avec $\lambda \neq 0$, on conclut

$$\boxed{\text{Si } M^2 = \text{Tr}(M)M \text{ et } \text{Tr}(M) \neq 0, \text{ alors } \text{rg } M = 1.}$$

3. On suppose désormais $\text{Tr}(M) = 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à M . On a $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\text{Im } u$ que l'on complète en $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ base de $\text{Ker } u$ ($q \geq r$). Puis, pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, il existe $\varepsilon_{q+i} \in E$ tel que $\varepsilon_i = u(\varepsilon_{q+i})$. On a $q + r = n$ d'après le théorème du rang. Notons $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et montrons que c'est une famille libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i = 0_E$. On applique u et il vient

$$u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i\right) = \sum_{i=q+1}^n \alpha_i u(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_{q+i} \varepsilon_i = 0_E$$

On en déduit $\alpha_{q+1} = \dots = \alpha_n = 0$ puis, par liberté de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$, on obtient la nullité des autres coefficients. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre de cardinal n ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base de E et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = K_r \quad \text{avec} \quad K_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad 2r \leq r + q = n$$

$$\boxed{\text{Si } M^2 = 0, \text{ alors } M \text{ est semblable avec } K_r \text{ avec } 2r \leq n.}$$

Remarque : Dans le cas où $\text{Tr}(M) = 0$, le rang n'est donc pas nécessairement 1 mais seulement $\leq n/2$.