

Feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$
2. $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$
3. $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$
4. $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$

Exercice 2 (*)

Soient E, F des $\mathbb{K}$ -ev et f, g dans $\mathcal{L}(E, F)^2$ avec $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$ de dimension finie. Montrer

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Exercice 3 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A triangulaire supérieure stricte. Montre que $A^n = 0$.

Exercice 4 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{n} \text{Tr}(M) I_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer φ^2 et $\text{Tr}(\varphi)$.

Exercice 5 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi : E \rightarrow E, M \mapsto M^\top$. Calculer $\det(\Phi)$.

Exercice 6 (**)

Soient p et q des projecteurs de E . Montrer

$$p + q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0$$

Quand cette condition est réalisée, montrer que

$$\text{Im } p + q = \text{Im } p + \text{Im } q \quad \text{Ker } p + q = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$$

Exercice 7 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in E$ avec $\text{rg}(H) = 1$.

1. Montrer que H est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ avec les α_i réels.

2. Montrer $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \det(A - H) \det(A + H) \leq \det(A)^2$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f_1, \dots, f_r$ des endomorphismes de E tels que $\sum_{i=1}^r f_i = \text{id}$ et $\sum_{i=1}^r \text{rg}(f_i) \leq n$. Montrer

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2 \quad f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im } f_i$$

Exercice 9 (*)

Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir A semblable à B .

Exercice 10 (**)

Soit n entier et $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de la base canonique $\mathcal{C} = (X^k)_{0 \leq k \leq n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 11 (**)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et F un sev de E de dimension $n - p$ ($p \leq n$). Montrer qu'il existe $H_1, \dots, H_p$ hyperplans de E tels que $F = \bigcap_{k=1}^p H_k$.

Exercice 13 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. On note

$$G = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$$

Vérifier que G est un sev de $\mathcal{L}(E)$ puis déterminer $\dim G$.

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad N_k = \text{Ker } f^k \quad I_k = \text{Im } f^k$$

1. Montrer que les suites $(I_k)_k$ et $(N_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $E = I_r \oplus N_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & N \end{array} \right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.