

Feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } A = 1$ et $\text{Tr}(A) = 0$. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$.

Exercice 2 (**)

Soit n entier non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$$

Vérifier que les F_i sont des sev de E et montrer que $E = \bigoplus_{i=0}^n F_i$.

Exercice 3 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à B avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E . On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Exercice 5 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul et $(A, B) \in E^2$. On pose

$$\forall M \in E \quad \Phi(M) = AM - MB$$

1. Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer $\forall (M, p) \in E \times \mathbb{N} \quad \Phi^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} M B^k$
3. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors Φ l'est aussi.

Exercice 6 (***)

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale nulle.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul.

1. Soient u, v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer

$$\operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \dim \operatorname{Ker} u$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p .

(a) Montrer que la suite $(\operatorname{Ker} u^k)_k$ croît strictement puis stationne.

(b) Établir
$$\frac{n}{p} \leq \dim \operatorname{Ker} u \leq n - p + 1$$

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer
$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(f^2) \leq \dim E$$
2. Montrer
$$2 \operatorname{rg}(f^2) \leq \operatorname{rg}(f)$$

Exercice 9 (***)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$.

1. On suppose $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > R_i \quad \text{avec} \quad R_i = \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$

Montrer que $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,i} = 3$ et $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geq 2$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 10 (***)

Déterminer les sev stables pour l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 11 (***)

Soient f, g des projecteurs non nuls de E un $\mathbb{K}$ -ev tels que

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mid f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$$

On suppose $(\lambda, \mu) \notin \{0, 1\}^2$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} g$ et que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.
2. Établir que $\lambda + \mu = 0$ puis $f \circ g = f$.
3. En déduire $f = g$.