

Feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g \in \text{GL}(E)$.

Montrer $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$ et $E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$

Indications : Comparer $\text{Im}(f+g)$ à $\text{Im } f + \text{Im } g$ et en déduire une minoration de $\text{rg}(f) + \text{rg}(g)$. Traduire $g \circ f = 0$ en terme d'inclusion puis utiliser le théorème du rang pour conclure.

Exercice 2 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

2. Justifier que $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ sans utiliser $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Indications : 1. Observer que pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la condition définit e_i^* sur une base de E .

2. Établir la liberté de $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ puis pour $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, montrer que celle-ci coïncide sur $\mathcal{B}$ avec le candidat naturel pour être la décomposition de f dans $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E . On pose

$$\Phi: \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Φ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *antédual* à $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Indications : 1. Supposer Φ non surjective et utiliser dans ce cas le fait que $\text{Im } \Phi$ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

2. Utiliser la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 4 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul, $A \in E$. Résoudre en l'inconnue $X \in E$ l'équation

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \tag{L}$$

Indications : Distinguer le cas $\text{Tr}(X) = 0$ puis $\text{Tr}(X) \neq 0$. On pourra utiliser l'application $X \mapsto \frac{1}{2}(X + X^\top)$ en remarquant qu'il s'agit d'un projecteur.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $v \in GL(E)$ et p projecteur de E tel que $u = v \circ p$.

Indications : Considérer $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ avec $\mathcal{B}$ une base de E puis travailler sur une matrice simple équivalente à A .

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u admet au moins deux sev stables.
2. On suppose u non nul et non injectif.
 - (a) Montrer que u admet au moins trois sev stables.
 - (b) Si $\dim E$ est impaire, montrer que u admet au moins quatre sev stables.
 - (c) Donner un exemple d'endomorphisme qui admet exactement trois sev stables.

Indications : 2.(a) Considérer $\text{Ker } u$.

2.(b) Comparer $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.

2.(c) S'inspirer de la configuration étudiée à la question 2.(b).

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E . On pose

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

Montrer Φ surjective $\iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre

Indications : Pour le sens direct, choisir judicieusement des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Pour le sens indirect, procéder par contraposition et observer que si l'application Φ n'est pas surjective, alors $\text{Im } \Phi$ est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 8 (****)

Soit n entier non nul et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\text{rg } M = 1$, alors $M^2 = \text{Tr}(M)M$.

Dans ce qui suit, on suppose que M vérifie la relation $M^2 = \text{Tr}(M)M$.

2. Si $\text{Tr}(M) \neq 0$, montrer que $\text{rg}(M) = 1$. On pourra considérer $A = \frac{1}{\lambda}M$ avec $\lambda = \text{Tr}(M)$.
3. Si $\text{Tr}(M) = 0$, décrire les classes de similitude de M .

Indications : 1. Établir que $M = XY^\top$ avec X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2. Calculer A^2 .

3. Avec une base bien choisie, établir que M est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec $2r \leq n$.