

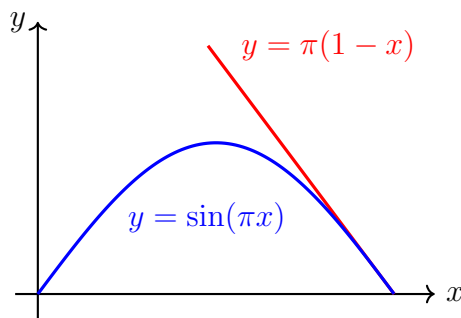
Feuille d'exercices n°10

Exercice 1 (*)

Établir $\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$

Corrigé : La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est concave sur $[0; 1]$ puisqu'elle est dérivable de dérivée $x \mapsto \pi \cos(\pi x)$ décroissante sur $[0; 1]$. Ainsi, sa tangente en 1 est au dessus du graphe d'où

$$\boxed{\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)}$$



Exercice 2 (*)

Établir $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\quad x \leq \tan(x)$

Corrigé : La fonction $\tan$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a $\tan' = 1 + \tan^2$ qui croît sur l'intervalle considéré. Ainsi, la fonction $\tan$ est convexe et considérant sa tangente en 0 qui est en dessous du graphe, il vient

$$\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \tan(x) \geq x}$$

Exercice 3 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f est convexe si et seulement si g l'est.

Corrigé : La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad g''(x) = \frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où $\forall x > 0 \quad g''(x) = \frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ réalise une permutation de $]0; +\infty[$, les fonctions g'' et f'' sont de même signe et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe si et seulement si } g \text{ l'est.}}$$

Exercice 4 (*)

Que peut-on dire de la somme deux fonctions convexes ? de leur produit ?

Corrigé : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Soient $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. On a

$$\begin{cases} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \end{cases}$$

et sommant ces deux lignes, on obtient

$$(f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y)$$

ce qui prouve la convexité de $f + g$. En revanche, on ne peut rien dire concernant le produit. Par exemple, si on considère les fonctions convexes $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$, leur produit n'est ni convexe, ni concave. Si on impose que les fonctions soient positives, le résultat est toujours faux, par exemple en considérant $x \mapsto (x - 1)^2$ et $x \mapsto (x + 1)^2$ dont le produit est $x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$. Ainsi

Une somme de fonctions convexes est convexe mais on ne peut rien dire du produit.

Exercice 5 (*)

1. Une composée de fonctions convexes est-elle convexe ?
2. La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est-elle convexe ?

Corrigé : 1. Avec $f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto x^2$, on a $f \circ g : x \mapsto -x^2$ non convexe.

Une composée de fonctions convexes n'est pas forcément convexe.

2. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\text{Im } g \subset J$, f et g convexes et f croissante. Pour $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0; 1]$, il vient par convexité de g

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

puis par croissance de f

$$f \circ g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y))$$

et par convexité de f

$$f \circ g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f \circ g(x) + (1 - \lambda)f \circ g(y)$$

Ainsi

La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est convexe.

Exercice 6 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Montrer

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$$

Corrigé : Comme $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$ et $\mathbb{P}(X = x) \geq 0$ pour $x \in X(\Omega)$, il vient d'après l'inégalité de Jensen

$$f(\mathbb{E}(X)) = f\left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)\right) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

Par transfert, on a

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(f(X))$$

On conclut

$$\boxed{f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))}$$

Exercice 7 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g convexe. Montrer

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g \circ f$$

Corrigé : Soit n entier non nul. D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$g\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g \circ f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on obtient d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann appliqué aux fonctions continues par morceaux f et $g \circ f$ et la continuité de g

$$\boxed{g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g \circ f}$$

Exercice 8 (*)

Soient $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Montrer

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

Corrigé : La fonction $\sqrt{\cdot}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Jensen, il vient

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

On conclut

$$\boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$$

Exercice 9 (*)

Soit $\alpha \geq 1$. Établir

$$\forall x \geq 0 \quad 1 - x^\alpha \leq \alpha(1 - x)$$

Corrigé : On pose $f(x) = 1 - x^\alpha$ pour $x \geq 0$. La fonction f est dérivable avec $f'(x) = -\alpha x^{\alpha-1}$ pour $x \geq 0$. La dérivée f' décroît et on en déduit la concavité de f sur $[0; +\infty[$. Par position graphe/tangente, on a

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Et on conclut

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad 1 - x^\alpha \leq \alpha(1 - x)}$$

Exercice 10 (*)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev. Montrer qu'une intersection de parties de E convexes est convexe.

Corrigé : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes et $a, b \in \bigcap_{i \in I} C_i$. Pour $\lambda \in [0; 1]$, on a

$$\forall i \in I \quad \lambda a + (1 - \lambda)b \in C_i$$

c'est-à-dire
$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in \bigcap_{i \in I} C_i$$

Ainsi

Une intersection de convexes est un convexe.

Exercice 11 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ convexe. Montrer

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Corrigé : Par convexité, le graphe de f est sous la corde entre a et b et au-dessus de la tangente en $\frac{a + b}{2}$ d'où

$$\forall t \in [a; b] \quad f'\left(\frac{a + b}{2}\right)\left(t - \frac{a + b}{2}\right) + f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq f(t) \leq f(a) + \tau(a, b)(t - a)$$

On intègre et on obtient

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Exercice 12 (**)

Établir
$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{\pi}$$

Corrigé : Par concavité, on a

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$$

Après intégration, il vient

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \int_0^x \sin(t) dt \geq \int_0^x \frac{2}{\pi}t dt$$

D'où

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{\pi}$$

Exercice 13 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe majorée. Montrer que f est constante.
Le résultat subsiste-t-il pour $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$?

Corrigé : Supposons f non constante. Il existe $a < b$ tel $\tau(a, b) \neq 0$. Supposons $\tau(a, b) > 0$. Par croissance de $x \mapsto \tau(a, x)$, on trouve pour $x > b$

$$\tau(a, x) \geq \tau(a, b) \iff f(x) \geq f(a) + (x - a)\tau(a, b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Supposons $\tau(a, b) < 0$. Par croissance de $x \mapsto \tau(a, x)$, on trouve pour $x < a$

$$\tau(a, x) \leq \tau(a, b) \iff f(x) \geq f(a) + (x - a)\tau(a, b) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$$

Ainsi

La fonction f est constante.

Le résultat est faux pour $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On peut considérer $f : x \mapsto -x$ par exemple.

Exercice 14 (**)

Soit p entier non nul et $(u_n)_n$ suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}}$ converge.

Corrigé : Par concavité, on a

$$\ln \left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln u_{n+i} \leq \ln \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)$$

d'où

$$\left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i} = \frac{1}{p} [R_{n-1} - R_{n+p-1}]$$

et

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{p} [R_{n-1} - R_{n+p-1}] = \frac{1}{p} \left[\sum_{n=0}^{p-1} R_{n-1} - \sum_{n=N+1}^{N+p} R_{n-1} \right] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{p-1} R_{n-1}$$

Par comparaison pour des séries à termes positifs, on conclut

La série $\sum \left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}}$ converge.