

Corrigé du devoir en temps libre n°4

Problème I

1. Pour $g \in G$, on a $g(F) \subset F$ et $F = \text{Im } p = \text{Ker}(\text{id} - p)$ d'où $p \circ g \circ p = g \circ p$. Par suite, il vient

$$p \circ q = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} p \circ g \circ p \circ g^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1} = q$$

Puis, pour $g \in G$, on a aussi $g^{-1} \in G$ d'où $g^{-1}(F) \subset F$. Ainsi, pour $x \in E$, on a $p(x) \in F$ puis $g^{-1} \circ p(x) \in F = \text{Ker}(\text{id} - p)$ d'où

$$q \circ p(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1} \circ p(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ g^{-1} \circ p(x) = p(x)$$

Ainsi

$$p \circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p$$

2. On a $q \in \mathcal{L}(E)$ puis

$$q^2 = q \circ q = q \circ (p \circ q) = (q \circ p) \circ q = p \circ q = q$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } q \text{ est un projecteur.}}$$

3. On sait $p \circ q = q$ et on en déduit $\text{Im } q \subset \text{Im } p$ et on sait $q \circ p = p$ d'où l'on déduit $\text{Im } p \subset \text{Im } q$ et par conséquent $\text{Im } q = \text{Im } p$. On conclut

$$\boxed{\text{Im } q = F}$$

4. Soit $x \in \text{Ker } q$ et $h \in G$. On a

$$\begin{aligned} q(h(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1} \circ h(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ (h^{-1} \circ g)^{-1}(x) \\ &= h \circ \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (h^{-1} \circ g) \circ p \circ (h^{-1} \circ g)^{-1}(x) \end{aligned}$$

Or, l'application $g \mapsto h^{-1} \circ g$ réalise une permutation de G d'où

$$q(h(x)) = h \circ \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1}(x) = h(q(x)) = h(0_E) = 0_E$$

ce qui prouve $h(x) \in \text{Ker } q$ ce pour tout $h \in G$. Et comme q est un projecteur, on a

$$E = \text{Im } q \oplus \text{Ker } q$$

On conclut

$$\boxed{\text{Le sev } \text{Ker } q \text{ est un supplémentaire de } F \text{ stable par tout élément de } G.}$$

Problème II

1. L'application τ est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même et on a

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \tau(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$$

D'où

$$T = \text{mat}_{\mathcal{C}} \tau = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $T = (t_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ avec $t_{i,j} = \binom{j}{i}$ pour $(i,j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$.

2. L'application $P(X) \mapsto P(X-1)$ est clairement réciproque de l'application τ et on a

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \tau^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i$$

Ainsi

$$\tau \in \text{GL}(\mathbb{R}_n[X]) \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^0 \binom{0}{0} & (-1)^1 \binom{1}{0} & \cdots & (-1)^n \binom{n}{0} \\ 0 & (-1)^0 \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (-1)^1 \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^0 \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $T^{-1} = (s_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ avec $s_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j}{i}$ pour $(i,j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$.

3. Choisir une application de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; p \rrbracket$ équivaut à choisir la taille de l'ensemble image, c'est-à-dire un entier $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, puis les k éléments de l'image avec $\binom{p}{k}$ façons de faire ce choix et une surjection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sur cet ensemble. Notant $\mathcal{S}(E, F)$ les surjections de E sur F , on a

$$\llbracket 1; p \rrbracket^{\llbracket 1; n \rrbracket} = \bigsqcup_{k=0}^p \bigsqcup_{Y \subset \llbracket 1; p \rrbracket, \text{Card}(Y)=k} \underbrace{\mathcal{S}(\llbracket 1; n \rrbracket, Y)}_{\text{Card}=S_{n,k}}$$

Ainsi

$$p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} S_{n,k}$$

4. On note U et V les colonnes de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées sont respectivement les u_i et les v_i . On a $V = T^T U$ et par suite $U = T^{-1T} V$ d'où

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad v_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u_i \quad \text{et} \quad u_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} v_i$$

5. Il s'agit de *l'inversion de Pascal*. Soit $U \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. On a $U = T^{-1T} U$ d'où

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad u_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} u_p$$

Ainsi, avec $u_k = S_{n,k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on trouve

$$S_{n,k} = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \underbrace{\sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} S_{n,p}}_{=\ell^n}$$

D'où

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad S_{n,k} = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \ell^n$$

Problème III

1. On note $P = a_n \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et on pose $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour $x \in]x_i; x_{i+1}[$, il vient par dérivation

$$\frac{d}{dx} [\ln(|P(x)|)] = \frac{d}{dx} \left[\ln(|a_n|) + \sum_{k=1}^n \ln(|x - x_k|) \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}$$

D'où
$$\frac{d^2}{dx^2} [\ln |P(x)|] = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - x_k)^2} \leq 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \ln |P(x)| \text{ est concave sur chaque intervalle du domaine de définition.}}$$

2. On a

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall x \in]x_i; x_{i+1}[\quad \frac{d^2}{dx^2} [\ln |P(x)|] = \frac{d}{dx} \left[\frac{P'(x)}{P(x)} \right] = \frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2}$$

Par concavité de $x \mapsto \ln |P(x)|$ sur chaque intervalle de définition, il vient

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall x \in]x_i; x_{i+1}[\quad P''(x)P(x) \leq P'(x)^2$$

L'inégalité vaut trivialement en les x_i et on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad P''(x)P(x) \leq P'(x)^2}$$

D'après le théorème de Rolle, on dispose pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ de $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$. On a $x_1 < y_2 < x_2 < \dots < y_{n-1} < x_n$ ce qui prouve que P' est scindé à racines simples puisque $\deg P' = n-1$. Une récurrence immédiate prouve que $P^{(k)}$ est scindé à racines simples pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. En appliquant le résultat précédemment établi à $P^{(k)}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P^{(k+2)}(x)P^{(k)}(x) \leq P^{(k+1)}(x)^2$$

Enfin, on observe que le résultat est immédiat pour $k \geq n$ puisque $P^{(n+2)} = 0$ et on conclut

$$\boxed{\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad P^{(k+2)}(x)P^{(k)}(x) \leq P^{(k+1)}(x)^2}$$

3. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. D'après ce qui précède, on a

$$P^{(k-1)}(0)P^{(k+1)}(0) \leq P^{(k)}(0)^2$$

autrement dit

$$(k-1)!(k+1)!a_{k-1}a_{k+1} \leq k!a_k^2$$

d'où

$$a_{k-1}a_{k+1} \leq \frac{k}{k+1}a_k^2 \quad \text{et} \quad \frac{k}{k+1} \leq 1$$

On conclut

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2}$$

Remarque : En fait, on peut faire mieux et montrer

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad (k+1)a_{k-1}a_{k+1} < ka_k^2$$

en utilisant la stricte convexité de $x \mapsto \ln(|P(x)|)$. On lit notamment dans l'inégalité finale que deux coefficients consécutifs ne peuvent être nuls. D'ailleurs, c'est pour établir le caractère strict qu'on a réellement besoin d'un polynôme scindé à racines simples. Pour une inégalité large, un polynôme scindé suffit.