

Devoir en temps libre n°5

Problème I

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in E$ avec $\text{Tr}(A) \neq 0$. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = \text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que φ est diagonalisable puis calculer $\text{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Problème II

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que l'endomorphisme u est *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *compagne* si et seulement s'il existe des scalaires $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Soit u nilpotent d'ordre de nilpotence égal à n . Montrer que u est cyclique.
2. Établir

$$u \text{ est cyclique} \iff \text{il existe } \mathcal{B} \text{ base de } E \text{ telle que } \text{mat}_{\mathcal{B}} u \text{ est compagne}$$

3. On suppose u cyclique.
 - (a) Montrer que $(\text{id}, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.
 - (b) En déduire $\pi_u = \chi_u$.

Problème III

Questions préliminaires

- (i) Dans E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, justifier que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent admettent une même base de diagonalisation.
- (ii) Pour $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $Z(E)$ l'ensemble des matrices de E qui commutent avec toute matrice de E . Établir

$$Z(E) = \text{Vect}(I_n)$$

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(A, B) \in E^2$. On pose

$$\forall M \in E \quad \Phi(M) = AM + MB$$

1. Justifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. On suppose A et B diagonalisables.
 - (a) Soit $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ tel que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $Q^{-1}BQ = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
On pose $M_{i,j} = PE_{i,j}Q^{-1}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Calculer $\Phi(M_{i,j})$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.
 - (b) En déduire que Φ est diagonalisable.
3. On suppose désormais Φ diagonalisable.
 - (a) Justifier qu'il existe dans E des matrices D_1, D_2 diagonalisables, N_1, N_2 nilpotentes telles que $A = D_1 + N_1$, $B = D_2 + N_2$ avec $D_1N_1 = N_1D_1$ et $D_2N_2 = N_2D_2$.

On pose

$$\forall M \in E \quad \Phi_d(M) = D_1M + MD_2 \quad \text{et} \quad \Phi_n(M) = N_1M + MN_2$$

- (b) Établir que Φ_d est diagonalisable, Φ_n nilpotent avec $\Phi_d \circ \Phi_n = \Phi_n \circ \Phi_d$.
- (c) À l'aide des résultats préliminaires, montrer que Φ_n est diagonalisable.
- (d) En déduire $N_1 = -N_2$ et $N_1 \in Z(E)$.
- (e) Conclure que les matrices A et B sont diagonalisables.