

Feuille d'exercices n°21

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est le seul sev non nul stable par u .

1. L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $\mathcal{L}_x = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
3. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{L}_x} u$. Cette matrice dépend-elle du choix de $x \in E \setminus \{0_E\}$?

Corrigé : 1. S'il existe λ réel et $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par u ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi

L'endomorphisme u n'admet aucune valeur propre.

2. Soit $x \neq 0_E$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(u) = 0$ d'où $u^n(x) \in \text{Vect}(\mathcal{L}_x)$. Ainsi, l'espace $\text{Vect}(\mathcal{L}_x)$ est stable et non trivial d'où $\mathcal{L}_x$ famille génératrice et de cardinal égal à $\dim E$ d'où

Pour $x \neq 0_E$, la famille $\mathcal{L}_x$ est une base de E .

Remarque : Sans le théorème de Cayley-Hamilton, si $\mathcal{L}_x$ est liée, on choisit

$$p = \max \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x, \dots, u^{k-1}(x)) \text{ libre}\}$$

qui est bien défini comme maximum d'une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ majorée par $n - 1$. La famille $(x, \dots, u^p(x))$ est liée d'où l'existence de scalaires a_i tels que $u^p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)$. Par suite, l'espace $\text{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$ est stable, non trivial et distinct de E ce qui est exclu.

3. Soit $x \neq 0_E$. On a $u^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x)$ d'où

$$\text{mat}_{\mathcal{L}_x} u = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $y \neq 0_E$. On a $y = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x)$ avec les α_i réels. L'algèbre $\mathbb{R}[u]$ étant commutative, il vient

$$\begin{aligned} u^n(y) &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^n(u^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(u^n(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(y) \end{aligned}$$

Ainsi

La matrice $\text{mat}_{\mathcal{L}_x} u$ ne dépend pas du choix de $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Variante : D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$u^n = -\text{Tr}(u)u^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1} \det(u) \text{id}$$

d'où

$$u^n(x) = -\text{Tr}(u)u^{n-1}(x) + \dots + (-1)^{n+1} \det(u)x$$

et les coefficients ne dépendent pas du choix de $x \neq 0_E$ ce qui prouve que la matrice $\text{mat}_{\mathcal{L}_x} u$ ne dépend pas de ce choix. Cette variante utilise de manière essentielle le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 2 (**)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$ -ev et $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les éléments propres de T .

Corrigé : 1. Notant $\varphi : \mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$, on a $E = \text{Ker } \varphi$ sev de $\mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R})$. Soit $f \in E$. On a $T(f)$ continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. Puis, notant $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, on a

$$\forall x > 0 \quad T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0) = 0$$

Ainsi, l'application T est à valeurs dans E et T est linéaire par linéarité de l'intégrale et du produit. Ainsi

$$L'ensemble E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev et } T \in \mathcal{L}(E).$$

2. Soit λ réel et $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $T(f) = \lambda f$. Ainsi

$$\forall x \geq 0 \quad \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$$

Par dérivation, il vient

$$\forall x \geq 0 \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$$

Si $\lambda = 0$, alors f est nulle ce qui est exclu. Pour λ non nul, on trouve

$$f \in \text{Vect}(x \mapsto x^\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

On veut f continue en 0 avec $f(0) = 0$ ce qui impose $\alpha > 0$ d'où $\lambda \in]0; 1[$. Réciproquement, on vérifie sans difficulté que $\text{Vect}(x \mapsto x^\alpha)$ est bien une droite de vecteurs propres et on conclut

$$\forall \lambda \in]0; 1[\quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \text{ valeur propre de } T \text{ et } E_\alpha(T) = \text{Vect}(x \mapsto x^\alpha)$$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $\pi_{u,x}(u)(x) = 0_E$ et divisant tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(u)(x) = 0_E$.
2. On suppose $\pi_u = P^r$ avec P irréductible et r entier non nul. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Corrigé : 1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On pose

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0_E\}$$

On vérifie sans difficulté que I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non nul car $\pi_u \in I_x$ avec $\pi_u \neq 0$. Ainsi, d'après le théorème de structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe $\pi_{u,x}$ unitaire qui engendre l'idéal I_x .

2. On a $P^{\alpha-1}(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On dispose donc de $x \in E$ tel que $P^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_E$. Comme $\pi_{u,x}$ divise $\pi_u = P^\alpha$ avec P irréductible, alors on a $\pi_{u,x} = P^s$ avec $s \leq \alpha$. Or, par choix de x , on a $P^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_E$ d'où $s \geq \alpha$ et par conséquent

Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Variante : Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $\pi_u \in I_x$ d'où $\pi_{u,x} \mid \pi_u = P^r$ donc $\pi_{u,x}$ est de la forme P^α avec $\alpha \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E . Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\alpha_i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $\pi_{u,e_i} = P^{\alpha_i}$. On choisit $\alpha_q = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \alpha_i$. Ainsi, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \pi_{u,e_q}(u)(e_i) = P^{\alpha_q}(u)(e_i) = P^{\alpha_q - \alpha_i}(u) \circ P^{\alpha_i}(u)(e_i) = 0$$

ce qui prouve que π_{u,e_q} s'annule sur la base $\mathcal{B}$ donc est nul. Il s'ensuit $\pi_u \mid \pi_{u,e_q}$ et ces polynômes sont donc associés et unitaires donc égaux.

Exercice 4 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } A = 2$. Déterminer une expression de χ_A en fonction de $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^2)$.

Corrigé : En complétant une base du noyau de A en base de $\mathbb{K}^n$, on trouve que A est semblable à $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$ avec $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ainsi, on a

$$\chi_A = X^{n-2}(X - (a+d)X + ad - bc) = X^{n-2}(X^2 - \text{Tr}(A)X + ad - bc)$$

On calcule (par blocs) A^2 et il vient

$$M^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & BA' \\ \hline 0 & A'^2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad A'^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2) = (a+d)^2 - (a^2 + 2bc + d^2) = 2(ad - bc)$

Et par conséquent

$$\chi_A = X^{n-2} \left(X^2 - \text{Tr}(A)X + \frac{(\text{Tr } A)^2 - \text{Tr}(A^2)}{2} \right)$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g - g \circ f \in \text{Vect}(f, g)$$

Montrer que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Corrigé : On a $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$ avec α, β complexes. Les cas $\alpha = \beta = 0$ et $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ont été traités antérieurement. Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, posant $h = \frac{1}{\alpha}g$, on se ramène à $f \circ h - h \circ f = f$ déjà vu. Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, posant $h = -f$, on se ramène au cas $g \circ h - h \circ g = \beta g$. Supposons enfin α et β non nuls. On pose $h = \alpha f + \beta g$. Il vient

$$f \circ h - h \circ f = \alpha f^2 + \beta f \circ g - \alpha f^2 - \beta g \circ f = \beta(f \circ g - g \circ f) = \beta h$$

d'où h et f admettent un vecteur propre commun et par conséquent, $\frac{1}{\beta}(h - \alpha f)$ et f également et on conclut

Les endomorphismes f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 6 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$ -ev admettant un polynôme minimal π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer $P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1$

2. Montrer que si $P(u) \in \text{GL}(E)$, alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : 1. Si $P \wedge \pi_u = 1$, d'après le théorème de Bézout, il existe $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AP + B\pi_u = 1$ d'où

$$\text{id} = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ \pi_u(u) = A(u) \circ P(u) = P(u) \circ A(u)$$

ce qui prouve le sens indirect. Supposons $P \wedge \pi_u \neq 1$. Notons $D = P \wedge \pi_u$. Comme D divise P et π_u , on a $P = QD$ et $\pi_u = RD$ avec Q et R dans $\mathbb{K}[X]$. Comme π_u est non nul, on a R et D non nuls et D non constant puisque D est unitaire avec $D \neq 1$. Il vient

$$R(u) \circ P(u) = R(u) \circ D(u) \circ Q(u) = \pi_u(u) \circ Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si $P(u) \in \text{GL}(E)$, en composant par $P(u)^{-1}$ à droite, on obtient $R(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ avec $\deg R < \deg \pi_u$ ce qui est absurde. On conclut

$$P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1$$

Variante : Pour le sens direct, on peut aussi considérer $P = \lambda \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles avec les α_i entiers non nuls. Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $\pi_u = P_i Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. Il s'ensuit que π_u divise PQ d'où $P(u) \circ Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et en composant par $P(u)^{-1}$ à gauche, on en déduit $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ avec $Q \neq 0$ et $\deg Q < \deg \pi_u$ (car P_i non constant) ce qui est absurde. On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, le polynôme irréductible P_i ne divise pas π_u autrement dit $\pi_u \wedge P_i = 1$ et il s'ensuit $P \wedge \pi_u = 1$.

2. D'après ce qui précède, on a vu que si $P(u)$ est inversible, alors il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(u) \circ P(u) = \text{id}$, autrement dit $A(u) = P(u)^{-1}$ et donc

$$\text{Si } P(u) \in \text{GL}(E), \text{ alors } P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u].$$

Exercice 7 (****)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(A, B) \in E^2$ et on pose $\varphi(M) = AM + MB$ pour tout $M \in E$. Établir

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(A) + \text{Sp}(B)$$

Corrigé : Remarquons en premier lieu que $\chi_B = \chi_{B^\top}$ puisqu'un déterminant est invariant par transposition. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $X \neq 0$ telle que $AX = \lambda X$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $Y \neq 0$ telle que $B^\top Y = \mu Y$ avec λ, μ des scalaires. Pour $M = XY^\top$, on obtient

$$\varphi(M) = AM + MB = AXY^\top + X(B^\top Y)^\top = \lambda XY^\top + X(\mu Y)^\top = (\lambda + \mu)XY^\top = (\lambda + \mu)M$$

et $M = (x_i y_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas nulle d'où l'inclusion

$$\text{Sp}(A) + \text{Sp}(B) \subset \text{Sp}(\varphi)$$

Soit $M \in E \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(M) = \alpha M$. On a

$$AM + MB = \alpha M \iff AM = M(\alpha I_n - B)$$

Par récurrence immédiate, on obtient alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k M = M(\alpha I_n - B)^k$$

et par combinaison linéaire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(A)M = M P(\alpha I_n - B)$$

Par suite

$$M\pi_A(\alpha I_n - B) = 0$$

Comme M n'est pas nulle, il en résulte que $\pi_A(\alpha I_n - B)$ n'est pas inversible. Notant $\pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$, on a donc

$$\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} ((\alpha - \lambda)I_n - B)^{\alpha_\lambda} \text{ non inversible}$$

Ainsi, il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\det((\alpha - \lambda)I_n - B) = 0$ ce qui équivaut à dire

$$\exists \lambda \in \text{Sp}(A) \quad | \quad \alpha - \lambda \in \text{Sp}(B)$$

ce qui prouve que $\alpha \in \text{Sp}(A) + \text{Sp}(B)$. On conclut

$$\boxed{\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(A) + \text{Sp}(B)}$$

Variante : On peut procéder un peu différemment pour l'inclusion $\text{Sp}(\varphi) \subset \text{Sp}(A) + \text{Sp}(B)$. Soit $M \in E \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(M) = \alpha M$. On a

$$\varphi(M) = \alpha M \iff AM = MC \quad \text{avec} \quad C = \alpha I_n - B$$

Notons $r = \text{rg } M$. En considérant des matrices équivalentes et par blocs (voir exercice 6 feuille 20), on montre que χ_A et χ_C ont un facteur commun de degré $r \geq 1$ ce qui implique une valeur propre commune λ pour A et C . Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $CX = \lambda X$, c'est-à-dire $(\alpha I_n - B)X = \lambda X$ ou encore

$$BX = (\alpha - \lambda)X$$

Ainsi, on a

$$\alpha = \underbrace{\lambda}_{\in \text{Sp}(A)} + \underbrace{\alpha - \lambda}_{\in \text{Sp}(B)}$$