

Feuille d'exercices n°19

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : E \rightarrow E, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. Déterminer les valeurs propres de σ .

Exercice 2 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$ et φ définie sur E par $\varphi(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$ pour $M \in E$. Déterminer les éléments propres de φ .

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et f, g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Si E est de dimension finie, établir

$$\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$$

3. On choisit $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto XP$ et $g : P \mapsto P'$. Montrer que f, g sont dans $\mathcal{L}(E)$ puis déterminer si zéro est valeur propre de $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 4 (**)

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|M\| = \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$. Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-\|A\|; \|A\|]$$

Exercice 5 (**)

Soit n entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Établir que la famille $\mathcal{B} = (X^k(X-1)^{n-k})_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de E et préciser $\text{mat}_{\mathcal{B}}\varphi$.

Exercice 6 (*)

Soit n entier. On considère D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer π_D .

Exercice 7 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_A avec χ_{A^T} , π_A avec π_{A^T} .

Exercice 8 ()**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ avec $P \wedge Q = 1$ et $(PQ)(f) = 0$. Montrer

$$E = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Im } P(f)$$

Exercice 9 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = 1$. Déterminer χ_A .

Exercice 10 ()**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = 1$. Déterminer π_A .

Exercice 11 ()**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset \iff \chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

Exercice 12 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \text{GL}(E)$. Montrer que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 13 ()**

Calculer χ_A avec $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 14 ()**

Calculer χ_A avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 15 ()**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier impair. Montrer que la matrice A admet une valeur propre réelle.