

Feuille d'exercices n°20

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Exercice 2 (**)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices par blocs

$$U = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline B & I_n \end{array} \right) \quad \text{et} \quad V = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -B & \lambda I_n \end{array} \right)$$

1. À l'aide des matrices U et V , établir $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Montrer que $\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que χ_A divise π_A^n .

Exercice 4 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale avec $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$ et $A_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Déterminer χ_A en fonction des χ_{A_i} et π_A en fonction des π_{A_i} .

Exercice 5 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$ -ev admettant un polynôme minimal π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer $P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1$
2. Montrer que si $P(u) \in \text{GL}(E)$, alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

Montrer que f est nilpotent et que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } X = r \geq 1$ tel que $AX = XB$. Montrer que χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré r .
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX - XB = M$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admette une unique solution.

Exercice 8 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une valeur propre complexe non réelle, alors il existe un plan vectoriel stable par A .

Exercice 9 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$.

1. On suppose $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > R_i$ avec $R_i = \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$

Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour $(a, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, on note $D_f(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}$. Montrer

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_f(a_{i,i}, R_i)$$

Les ensembles $D_f(a_{i,i}, R_i)$ sont appelés *disques de Gerschgorin*.

Exercice 10 (***)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et vérifiant $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que $1 \in \text{Sp}(A)$.
2. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leq 1$.
3. Établir que si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{U}$, alors $\lambda = 1$.