

Feuille d'exercices n°21

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est le seul sev non nul stable par u .

1. L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $\mathcal{L}_x = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
3. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{L}_x} u$. Cette matrice dépend-elle du choix de $x \in E \setminus \{0_E\}$?

Indications : 1. Considérer une droite vectorielle stable par u .

2. Considérer $\text{Vect}(\mathcal{L}_x)$.

3. Pour $y \in E \setminus \{0_E\}$, déterminer $u^n(y)$ en fonction des $u^k(y)$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Exercice 2 (**)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$ -ev et $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les éléments propres de T .

Indications : 1. Pour $f \in E$, vérifier la continuité de $T(f)$ en zéro.

2. Soit λ réel et $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $T(f) = \lambda f$. Dériver cette relation puis étudier la non nullité de f et sa continuité en 0.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $\pi_{u,x}(u)(x) = 0_E$ et divisant tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(u)(x) = 0_E$.
2. On suppose $\pi_u = P^r$ avec P irréductible et r entier non nul. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Indications : 1. Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, considérer

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0_E\}$$

et vérifier qu'il s'agit d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

2. Observer que pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $\pi_{u,x} \mid \pi_u$ puis considérer π_{e_i} pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Exercice 4 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } A = 2$. Déterminer une expression de χ_A en fonction de $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^2)$.

Indications : Montrer que A est semblable à $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$ avec $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ puis calculer M^2 et A'^2 .

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g - g \circ f \in \text{Vect}(f, g)$$

Montrer que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Indications : Notant $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$ avec α, β complexes, traiter le cas avec $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ et enfin α et β non nuls. On pourra calculer $f \circ h - h \circ f$ avec $h = \alpha f + \beta g$.

Exercice 6 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$ -ev admettant un polynôme minimal π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer $P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1$

2. Montrer que si $P(u) \in \text{GL}(E)$, alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Indications : 1. Si $P \wedge \pi_u = 1$, utiliser la relation de Bezout. Pour la réciproque, procéder par contraposée.

Exercice 7 (****)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(A, B) \in E^2$ et on pose $\varphi(M) = AM + MB$ pour tout $M \in E$. Établir

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(A) + \text{Sp}(B)$$

Indications : Pour établir $\text{Sp}(A) + \text{Sp}(B) \subset \text{Sp}(\varphi)$, considérer α et M matrice non nulle telle que $\varphi(M) = \alpha M$ puis observer $AM = M(\alpha I_n - B)$ et en déduire $P(A)M = MP(\alpha I_n - B)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$. Considérer π_A et conclure.