

Préparation à l'interrogation n°05

1 Algèbre linéaire

1. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$$

2. Formule de Grassmann : Soient F, G sev de dimensions finies de E un $\mathbb{K}$ -ev. On a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

3. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F, G des sev de E . On a

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F + G = E \end{cases} \\ &\iff \exists \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G \text{ bases respectives de } F, G \mid \mathcal{B}_F \uplus \mathcal{B}_G \text{ base de } E \end{aligned}$$

4. Théorème du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$ -ev.

$$\text{On a} \quad \dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg}(f)$$

5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F des $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie. On a

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

2 Calcul matriciel

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \text{ pour tout } (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket;$$

2. Soit $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation

$$\forall (i,j,k,\ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^4 \quad E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

3. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$;

4. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$;

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\text{ACom}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$$

6. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $A = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det(A)$ dit *de Vandermonde* vaut

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = r$. Il existe P, Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_r Q$ avec $J_r = \text{diag}(I_r, 0)$.

3 Exercice type

Notant $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ pour λ réel, liberté de la famille $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_p})$ avec les λ_i deux à deux distincts (voir exemple du cours).

4 Exercice type

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > R_i \quad \text{avec} \quad R_i = \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$$

La matrice A est inversible.

Corrigé : Supposons $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$, autrement dit

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \quad | \quad AX = 0$$

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec les $x_i \in \mathbb{K}$. Si $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, on dispose de $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_i| > 0$$

La i_0 -ème ligne de AX est nulle donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0 & \iff a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j} x_j = 0 \\ & \iff |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j} \frac{x_j}{|x_{i_0}|} \right| \end{aligned}$$

la division par $|x_{i_0}|$ étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_i|$, il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right|}_{\leq 1} \leq \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A . Ainsi

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX = 0 \implies X = 0$$

d'où

$$\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

5 Exercice type

Polynôme caractéristique d'une matrice compagne (voir preuve du théorème de Cayley Hamilton).

6 Questions de cours

Réduction, graphes usuels.