

Préparation à l'interrogation n°06

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\cos(x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\frac{1}{1-x}$;
4. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1 - \cos(t)^n = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2} + o(t^2)$$

2 Trigonométrie

1. $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$

3 Formules

Résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

4 Algèbre linéaire

1. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$$

2. Formule de Grassmann : Soient F, G sev de dimensions finies de E un $\mathbb{K}$ -ev. On a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

3. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F, G des sev de E . On a

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F + G = E \end{cases} \\ &\iff \exists \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G \text{ bases respectives de } F, G \mid \mathcal{B}_F \uplus \mathcal{B}_G \text{ base de } E \end{aligned}$$

4. Théorème du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$ -ev.

$$\text{On a} \quad \dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg}(f)$$

5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F des $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie. On a

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

5 Calcul matriciel

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \operatorname{Com}(A)^\top = \operatorname{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$$

2. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $A = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det A$ dit *de Vandermonde* vaut

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg}(A) = r$. Il existe P, Q dans $\operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$ avec $J_r = \operatorname{diag}(I_r, 0)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(C_1, \dots, C_n)$ sa famille de colonnes et $(L_1, \dots, L_n)$ sa famille de lignes. On a

$$\begin{aligned} A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff \det(A) \neq 0 \iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \operatorname{Ker} A = 0 \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ libre} \iff (L_1, \dots, L_n) \text{ libre} \end{aligned}$$

6 Exercice type

On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

Corrigé : Les matrices sont triangulaires donc les valeurs propres et leurs multiplicités se lisent sur la diagonale. Ainsi, les matrices A et B ont chacune 3 valeurs propres distinctes et d'après la condition suffisante de diagonalisation, on en déduit que A et B sont semblables à la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1, 2, 3)$ (on choisit cet ordre) et par conséquent

Les matrices A et B sont semblables.

7 Exercice type

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ définie par $\varphi(P) = (X - 1)P'$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis que φ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

Corrigé : On a φ linéaire par linéarité de la dérivation et bilinéarité du produit puis on trouve

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) = kX^k - kX^{k-1}$$

Ainsi, la matrice $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}} \varphi$ avec $\mathcal{C}$ base canonique de E est triangulaire supérieure et on lit $\operatorname{Sp}(\varphi) = \llbracket 0; n \rrbracket$ d'où φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et par condition suffisante, ceci prouve que φ est diagonalisable. Enfin, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on cherche $P \in E$ tel que $\varphi(P) = kP$. En considérant l'équation différentielle $(x - 1)y' = ky$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$, on trouve $\operatorname{Vect}(x \mapsto (x - 1)^k)$ comme droite vectorielle de solutions.

L'application φ est un endomorphisme diagonalisable et $E_k(\varphi) = \operatorname{Vect}((X - 1)^k)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

8 Questions de cours

Réduction, graphes usuels.