

Feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

Montrer que $] -1 ; 1 [$ muni de la loi $\star$ définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ est un groupe commutatif.

Corrigé : La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1 [$. Soit $(x, y) \in] -1 ; 1 [$. Il existe u, v réels tels que $x = \text{th}(u)$ et $y = \text{th}(v)$ puis

$$x \star y = \frac{\text{th}(u) + \text{th}(v)}{1 + \text{th}(u)\text{th}(v)} = \text{th}(u+v)$$

La loi $\star$ est donc une loi interne, clairement associative et commutative, d'élément neutre 0 et tout élément x admet pour symétrique $-x$. On conclut

L'ensemble $(] -1 ; 1 [, \star)$ est un groupe commutatif.

Remarque : Une vérification naïve sans la fonction th fonctionne sans difficulté.

Exercice 2 (**)

Soit φ un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer

$$\sum_{x \in G} \varphi(x)$$

On pourra considérer l'application $x \mapsto a \star x$ avec $a \in G$ bien choisi.

Corrigé : Soit $a \in G$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. L'application $x \mapsto a \star x$ est une permutation de G dont la réciproque est donnée par $x \mapsto a^{-1} \star x$. Ainsi, on a

$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = \sum_{x \in G} \varphi(a \star x) = \sum_{x \in G} \varphi(a) \varphi(x) = \varphi(a) \sum_{x \in G} \varphi(x)$$

Compte-tenu du choix de a , on conclut

$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = 0$$

Exercice 3 (*)

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif puis déterminer $U(\mathbb{Z}[i])$. On pourra considérer l'application $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$.

Corrigé : On a $\mathbb{Z}[i]$ sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ et contenant 1. Puis, soit $(a, b), (c, d)$ dans $\mathbb{Z}^2$. On a

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc) \in \mathbb{Z}[i]$$

et loi $\times$ est commutative. Ainsi

L'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif.

Notons $N(z) = z\bar{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a $N(zz') = N(z)N(z')$ pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad N(a + ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$$

Soit $a + ib \in U(\mathbb{Z}[i])$. Il existe $c + id \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $(a + ib)(c + id) = 1$ et

$$N((a + ib)(c + id)) = N(a + ib)N(c + id) = N(1) = 1 \implies (a, b) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$$

Autrement dit

$$U(\mathbb{Z}[i]) \subset \{\pm 1, \pm i\}$$

L'inclusion réciproque est immédiate et on conclut

$$U(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$$

Remarque : L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est appelé *anneau des entiers de Gauss*.

Exercice 4 (**)

On note

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

2. Déterminer $U(\mathbb{D})$.

Corrigé : 1. On a $1 = \frac{1}{10^0} \in \mathbb{D}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{D}^2$, on a $x = \frac{p}{10^n}$ et $y = \frac{q}{10^m}$ avec $(p, q, n, m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$ puis

$$x - y = \frac{p}{10^n} - \frac{q}{10^m} = \frac{10^m p - 10^n q}{10^{n+m}} \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad xy = \frac{p}{10^n} \frac{q}{10^m} = \frac{pq}{10^{n+m}} \in \mathbb{D}$$

Ainsi

$$\text{L'ensemble } \mathbb{D} \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{Q}, +, \times).$$

2. Un élément de $U(\mathbb{D})$ s'écrit $\frac{p}{10^n}$ et il existe q et m entiers tels que $\frac{pq}{10^{n+m}} = 1$. Ainsi, on a $pq = 10^{n+m}$ d'où $p | 10^{n+m}$ et par conséquent

$$U(\mathbb{D}) \subset \left\{ (-1)^\varepsilon \frac{2^p 5^q}{10^n}, (\varepsilon, n, p, q) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}^3 \right\}$$

Réciproquement, pour $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$, on a

$$\frac{10^n}{2^p 5^q} = \begin{cases} \frac{10^n 2^{q-p}}{10^q} & \text{si } q \geq p \\ \frac{10^n 5^{p-q}}{10^p} & \text{si } p \geq q \end{cases}$$

On conclut

$$U(\mathbb{D}) = \left\{ (-1)^\varepsilon \frac{2^p 5^q}{10^n}, (\varepsilon, n, p, q) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}^3 \right\}$$

Exercice 5 (**)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $x \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe n entier non nul tel que $x^n = 0_A$. On note

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in A \mid x \text{ nilpotent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A .

2. Soit $a \in \mathcal{N}(A)$. Montrer que $1_A - a$ est inversible.

3. Soit $a \in \mathcal{N}(A)$ et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

Corrigé : 1. On a $0 \in \mathcal{N}(A)$. Soit $(x, y) \in \mathcal{N}(A)^2$ et n, m entiers non nuls tels que $x^n = y^m = 0$. On a $(-x)^n = ((-1)x)^n = (-1)^n x^n = 0$ d'où $-x \in \mathcal{N}(A)$. Puis

$$(x + y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}$$

Pour $k \in \llbracket 0; n+m \rrbracket$, on a un des deux exposants k ou $n+m-k$ suffisamment grand (on peut le voir comme une utilisation du principe des tiroirs : on doit placer $n+m$ chaussettes dans les deux tiroirs que constituent les exposants sur x et y dans la somme). Soit on a $k \geq n$, soit on a $k < n$ d'où $n+m-k > m$. Par suite, il vient $(x+y)^{n+m} = 0$ d'où $\mathcal{N}(A)$ sous-groupe de $(A, +)$. Enfin, pour $(a, x) \in A \times \mathcal{N}(A)$, avec n entier tel que $x^n = 0$, on a $(ax)^n = a^n x^n = 0$ et ainsi

L'ensemble $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de l'anneau A .

Remarque : L'idéal $\mathcal{N}(A)$ est appelé *nilradical* de l'anneau A .

2. Il existe n entier tel que $a^n = 0$. D'après l'identité de Bernoulli, on a

$$1 = 1 - a^n = (1 - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}$$

Ainsi

$$\forall a \in \mathcal{N}(A) \quad 1 - a \in U(A)$$

3. On a $a + b = b(1 - c)$ avec $c = -b^{-1}a$ nilpotent puisque $\mathcal{N}(A)$ est un idéal. Ainsi, on a $1 - c \in U(A)$ et comme $U(A)$ est un groupe, on conclut

$$\forall (a, b) \in \mathcal{N}(A) \times U(A) \quad a + b = b(1 + b^{-1}a) \in U(A)$$

Exercice 6 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I$$

Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Corrigé : Soit I idéal premier de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. On suppose $I \neq \{0\}$ sinon c'est immédiat par intégrité de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Il existe P unitaire tel que $I = P\mathbb{K}[X]$. Si $P = AB$ avec A et B non constants, alors $AB \in I$ et $A \notin I$, $B \notin I$. On a donc nécessairement P irréductible. Supposons P irréductible qui divise AB . On a $P \wedge A$ diviseur de P donc $P \wedge A = 1$ ou αP avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ (soit constant non nul et unitaire donc égal à 1, soit associé à P). Si $P \wedge A = \alpha P$ ce qui équivaut à dire $P = \alpha^{-1}P \wedge A$, comme $P \wedge A | A$, alors on a $P | A$. Sinon, si $P \wedge A = 1$ d'après le lemme de Gauss, on a $P | B$. Ainsi

Les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ sont exactement les $P\mathbb{K}[X]$ avec P irréductible.

Exercice 7 (**)

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X - a)(X - b)$ avec a, b dans $\mathbb{K}$.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$X^n = (X - a)(X - b)Q + R \tag{*}$$

avec $\deg R < 2$, autrement dit $R = \alpha X + \beta$ avec α, β scalaires.

Supposons $a \neq b$. En substituant X par a puis par b dans (*), on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ b^n = \alpha b + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{a^n - b^n}{a - b} \\ \beta = \frac{ab^n - ba^n}{a - b} \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a \neq b, \text{ on a } R = \frac{1}{a - b} ((a^n - b^n)X + ab^n - ba^n)}$$

Supposons $a = b$. Notant $S = (X - a)^2 Q$, on observe que S admet a pour racine double d'où $S(a) = S'(a) = 0$. En substituant X par a dans (*) puis dans la relation obtenue par dérivation de (*), on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ na^{n-1} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = na^{n-1} \\ \beta = (1 - n)a^n \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a = b, \text{ on a } R = na^{n-1}X + (1 - n)a^n}$$

Variantes : 1. Avec la formule de Taylor, on a

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = R + (X - a)^2 Q \quad \text{et} \quad R = P(a) + P'(a)(X - a)$$

2. On peut aussi considérer la base des polynômes de Lagrange $L_a = \frac{X - b}{X - a}$ et $L_b = \frac{X - a}{b - a}$. On a instantanément

$$R = a^n L_a + b^n L_b$$

Exercice 8 (*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. Déterminer r le nombre de racines de P en fonction de P et $P \wedge P'$.

Corrigé : Notons $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$ avec λ, α_i des complexes, λ non nul et m_i des entiers non nuls. Comme α_i racine de P' de multiplicité $m_i - 1$, on a

$$P \wedge P' = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i - 1}$$

puis

$$\deg(P \wedge P') = \sum_{i=1}^r (m_i - 1) = \deg P - r$$

Ainsi

$$\boxed{r = \deg P - \deg(P \wedge P')}$$

Exercice 9 (**)

Soit $(T_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \forall n \geq 2 \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

1. Calculer T_2, T_3 .
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n .

3. Montrer que $\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

4. En déduire une expression factorisée de T_n .

Corrigé : 1. Le calcul donne $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1 \quad T_3 = 4X^3 - 3X}$

2. On peut conjecturer que pour n entier non nul, on a $\deg T_n = n$ avec pour coefficient dominant 2^{n-1} et même parité que n . Prouvons cela par une récurrence double. On note

$$\mathcal{P}(n) : T_n = 2^{n-1}X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad \deg Q_n < n \quad \text{et} \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$$

• $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2)$: l'initialisation est immédiate.

• $\mathcal{P}(n-1) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 2. Par suite

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2XT_n - T_{n-1} \\ &= 2X(2^{n-1}X^n + Q_n) - T_{n-1} \\ T_{n+1} &= 2^n X^{n+1} + [2XQ_n - T_{n-1}] \end{aligned}$$

Posons $Q_{n+1} = 2XQ_n - T_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned} \deg Q_{n+1} &\leq \max(\deg 2XQ_n, \deg T_{n-1}) \\ &\leq \max(1 + n - 1, n - 1) = n < n + 1 \end{aligned}$$

Et
$$\begin{aligned} T_{n+1}(-X) &= 2(-X)T_n(-X) - T_{n-1}(-X) \\ &= 2(-1)^{n+1}T_n(X) - (-1)^{n-1}T_{n-1}(X) = (-1)^{n+1}T_{n+1}(X) \end{aligned}$$

le dernière égalité résultant de l'égalité $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ ce qui clôt la récurrence. On a donc prouvé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = 2^{n-1}X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad \deg Q_n < n \quad \text{et} \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)}$$

3. On procède encore par récurrence double. On note

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

• $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2)$: Soit x réel. On a

$$T_1(\cos(x)) = \cos(x) \quad T_2(x) = 2\cos(x)^2 - 1 = \cos(2x)$$

L'initialisation est vérifiée.

• $\mathcal{P}(n-1) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 2. Par suite, pour x réel, il vient

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(x)) &= 2\cos(x)T_n(\cos(x)) - T_{n-1}(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x) \\ &= 2\cos(x)\cos(nx) - [\cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x)] \\ T_{n+1}(\cos(x)) &= \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) = \cos((n+1)x) \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc montré

$$\boxed{\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)}$$

4. Soit n entier non nul. D'après la propriété établie à la question précédente, on a pour x réel

$$T_n(\cos(x)) = 0 \iff \cos(nx) = 0 \iff nx \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ce dernier ensemble est infini (puisque $\mathbb{Z}$ l'est). Mais les racines de T_n sont en nombre fini donc on peut se contenter de ne garder que certaines valeurs de x candidates. Comme $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$, on va se restreindre aux valeurs de x qui sont dans $[0; \pi]$. On a

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad 0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi(n-1/2)}{n} < \pi$$

L'application $x \mapsto \cos(x)$ étant en particulier injective sur $[0; \pi]$, des valeurs deux à deux distinctes de $[0; \pi]$ ont des images par la fonction $\cos$ qui sont également deux à deux distinctes d'où

$$\text{Card} \left\{ \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} = \text{Card} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \right), k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} = n$$

Ainsi, les $X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \right)$ divisent T_n et sont premiers entre eux d'où

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \right) \right) \text{ divise } T_n$$

Or
$$\deg \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \right) \right) = n = \deg T_n$$

et comme 2^{n-1} est le coefficient dominant de T_n , on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \right) \right)}$$

Exercice 10 (*)

Soit
$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{K}_{2n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ P & \longmapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n-1)}(0), P(1), P'(1), \dots, P^{(n-1)}(1)) \end{cases}$$

Montrer que φ est bijective.

Corrigé : On a $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_{2n-1}[X], \mathbb{K}^{2n})$, la linéarité résultant simplement de la linéarité de la dérivation. On remarque l'égalité des dimensions

$$\dim \mathbb{K}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{K}^{2n}$$

On a donc φ isomorphisme si et seulement si φ injective (si et seulement si φ surjective). Soit $P \in \text{Ker } \varphi$. On a 0 et 1 qui sont racines de P de multiplicité n donc X^n et $(X-1)^n$ divisent P . Comme ces polynômes sont premiers entre eux, on a $X^n(X-1)^n$ divise P mais $\deg P \leq 2n-1$. Il s'ensuit que P est le polynôme nul et par suite

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{K}_{2n-1}[X] \text{ sur } \mathbb{K}^{2n}.$$

Exercice 11 (**)

Soit $X \subset \mathbb{R}_+$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \quad P(x) = \sqrt{x}$$

Corrigé : Notons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à X . On a $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. On choisit alors $P = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} L_i$. On a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(x_j) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} L_i(x_j) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \delta_{i,j} = \sqrt{x_j}$$

Exercice 12 (*)

Parmi les ensembles suivants, lesquels ont une structure de $\mathbb{K}$ -algèbres :

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Corrigé : On sait que les ensembles de matrices diagonales et triangulaires supérieures sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit matriciel. En revanche, on a $I_n \notin \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ et notant $A = E_{1,1} + 2E_{2,2}$ et $B = E_{1,2} + E_{2,1}$, on trouve $AB = E_{1,2} + 2E_{2,1}$ qui n'est pas symétrique et on conclut

Les ensembles $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$ -algèbres mais pas $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 13 (*)

Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$ -algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Corrigé : Soit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres. On a $\varphi(1) = 1$ puis, pour $(x, y, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y) \quad \varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$$

Ainsi

$$\varphi(i^2) = \varphi(-1) = -\varphi(1) = -1 = \varphi(i)^2$$

d'où $\varphi(i) = \pm i$. On en déduit que φ est l'identité ou la conjugaison. Réciproquement, on vérifie que ces applications sont bien des morphismes de $\mathbb{R}$ -algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on conclut

Les morphismes de $\mathbb{R}$ -algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont l'identité et la conjugaison.