

Feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (**)

On note $SL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant égal à 1. Montrer que $(SL_n(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.

Corrigé : On a $I_n \in SL_n(\mathbb{Z})$. Soit $M \in SL_n(\mathbb{Z})$. On a $\text{Com}(M)^\top M = \det(M)I_n = I_n$ d'où M inversible dans $GL_n(\mathbb{R})$ d'inverse $\text{Com}(M)^\top$. Comme on a

$$\text{Com}(M) = ((-1)^{i+j} \det(M_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

avec $M_{i,j}$ matrice extraite de M par suppression de la i -ème ligne et j -ième colonne pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on en déduit que l'inverse de M est bien dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1} = 1$ d'où $M^{-1} \in SL_n(\mathbb{Z})$. Enfin, pour $(M, N) \in SL_n(\mathbb{Z})^2$, on a $MN \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ clairement et $\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1$ ce qui prouve que $SL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ et par suite

$$(SL_n(\mathbb{Z}), \times) \text{ est un groupe.}$$

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et G un sous-groupe de $GL(E)$ de cardinal fini n . Montrer

$$\dim \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{id}) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g)$$

Corrigé : On pose $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$. On a clairement $p \in \mathcal{L}(E)$. Pour $h \in G$ fixé, l'application $g \mapsto h \circ g$ est une permutation de G (d'inverse $g \mapsto h^{-1} \circ g$). Par conséquent, on a $\sum_{g \in G} h \circ g = \sum_{g \in G} g$ d'où

$$h \circ p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} h \circ g = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g = p$$

Ainsi

$$p^2 = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} h \circ p = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} p = p$$

ce qui prouve que p est un projecteur. En considérant une base adaptée à p , on obtient $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p) = \dim \text{Ker}(\text{id} - p)$. Soit $g \in G$. On a vu $g \circ p = p$. Soit $x \in \text{Ker}(\text{id} - p)$. Alors

$$p(x) = x \implies g(x) = g \circ p(x) = p(x) = x$$

autrement dit $x \in \text{Ker}(g - \text{id})$ pour tout $g \in G$ d'où $\text{Ker}(p - \text{id}) \subset \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{id})$ et l'inclusion réciproque est immédiate. On conclut

$$\dim \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{id}) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g)$$

Exercice 3 (****)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Montrer

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad 1_A - xy \in U(A) \iff 1_A - yx \in U(A)$$

On pourra supposer en premier lieu que xy est nilpotent.

Corrigé : Soit n entier non nul tel que $(xy)^n = 0$. Par associativité, on a $(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = 0$. Par télescopage, comme xy et yx commutent avec 1_A , il vient

$$(1_A - yx) \sum_{k=0}^n (yx)^k = \sum_{k=0}^n [(yx)^k - (yx)^{k+1}] = 1_A = \sum_{k=0}^n [(yx)^k - (yx)^{k+1}] = \sum_{k=0}^n (yx)^k (1_A - yx)$$

et de même
$$(1_A - xy) \sum_{k=0}^{n-1} (xy)^k = 1_A = \sum_{k=0}^{n-1} (xy)^k (1_A - xy)$$

Notant $z = (1_A - xy)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (xy)^k$, il vient

$$(1_A - yx)^{-1} = \sum_{k=0}^n (yx)^k = 1_A + \sum_{k=1}^n y(xy)^{k-1}x = 1_A + y \left(\sum_{k=0}^{n-1} (xy)^k \right) x = 1_A + yzx$$

d'où
$$(1_A - yx)(1_A + yzx) = (1_A + yzx)(1_A - yx) = 1_A$$

Vérifions cette égalité sans l'hypothèse de nilpotence de xy . On suppose $1_A - xy \in U(A)$ et on note $z = (1_A - xy)^{-1}$. On a donc $(1_A - xy)z = 1_A$ d'où $z - 1_A = xyz$. Puis

$$(1_A - yx)(1_A + yzx) = 1_A - yx + yzx - y(xyz)x = 1_A - yx + yzx - y(z - 1_A)x = 1_A$$

et on procède de même avec $z(1_A - xy) = 1_A$ pour établir que $1_A - yx$ est inversible. Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in A^2 \quad 1_A - xy \in U(A) \iff 1_A - yx \in U(A)}$$

Exercice 4 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$. On définit le *radical* de I noté $R(I)$ par

$$R(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : x^n \in I\}$$

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I .
2. Montrer que pour I, J des idéaux de A , on a

$$I \subset J \implies R(I) \subset R(J) \quad R(I \cap J) = R(I) \cap R(J) \quad R(I) + R(J) \subset R(I + J)$$

3. Soit I idéal de A . Montrer $R(R(I)) = R(I)$

Corrigé : 1. On a $0_A \in R(I)$ puisque $0_A^1 = 0_A \in I$. Soit $(x, y) \in R(I)^2$. Il existe des entiers non nuls n et m tels que $x^n \in I$ et $y^m \in I$. On rappelle que dans un anneau, on a $(-y)^k = (-1)^k y^k$ pour tout k entier. Puis

$$(x - y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k (-1)^{n+m-k} y^k$$

et on a
$$\forall k \in \llbracket 0; n+m \rrbracket \quad k \geq n \quad \text{ou} \quad n+m-k \geq m$$

car
$$k < n \quad \text{et} \quad n+m-k < m \iff k < n \quad \text{et} \quad k > n$$

ce qui est faux. Ainsi, pour $k \in \llbracket 0; n+m \rrbracket$, on a $x^k \in I$ ou $y^{n+m-k} \in I$ et par absorption

$$\forall k \in \llbracket 0; n+m \rrbracket \quad x^k y^{n+m-k} \in I$$

et par suite $x - y \in I$. Enfin, pour $(x, a) \in R(I) \times A$ et n entier non nul tel que $x^n \in I$, on a $(xa)^n = x^n a^n \in I$ par absorption et $x^1 = x \in I$ d'où

Le radical $R(I)$ est un idéal de A contenant I .

2. Supposons $I \subset J$. Soit $x \in R(I)$ et n entier non nul tel que $x^n \in I$. On a donc $x^n \in J$ d'où $x \in R(J)$. Avec cette propriété, si I et J sont des idéaux quelconques de A , on a $I \cap J \subset I$ et $I \cap J \subset J$ d'où $R(I \cap J) \subset R(I)$ et $R(I \cap J) \subset R(J)$ donc $R(I \cap J) \subset R(I) \cap R(J)$. Soit $x \in R(I) \cap R(J)$ et n, m entiers non nuls tels que $x^n \in I$ et $x^m \in J$. Notant $p = \max(n, m)$, on a par absorption $x^p \in I$ et $x^p \in J$ d'où $x^p \in I \cap J$ ce qui prouve $R(I) \cap R(J) \subset R(I \cap J)$. Enfin, l'idéal $R(I + J)$ est stable par $+$ en tant que sous-groupe de $(A, +)$ et comme $I \subset I + J$, $J \subset I + J$, il s'ensuit $R(I) \subset R(I + J)$ et $R(J) \subset R(I + J)$ d'où $R(I) + R(J) \subset R(I + J)$. Ainsi

$$I \subset J \implies R(I) \subset R(J) \quad R(I \cap J) = R(I) \cap R(J) \quad R(I) + R(J) \subset R(I + J)$$

4. On a $I \subset R(I)$ d'où $R(I) \subset R(R(I))$. Soit $x \in R(R(I))$. Il existe n entier non nul tel que $x^n \in R(I)$ puis m entier non nul tel que $(x^n)^m = x^{nm} \in I$. On en déduit clairement que $x \in R(I)$ d'où

$$R(I) = R(R(I))$$

Exercice 5 (**)

Que peut-on dire d'une suite croissante d'idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$?

Corrigé : Soit $(I_n)_n$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Quitte à réindexer, on suppose que les idéaux sont non nuls (le cas d'une suite nulle est trivial). Pour n entier, il existe P_n polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que $I_n = P_n \mathbb{K}[X]$. Avec l'inclusion $P_n \mathbb{K}[X] \subset P_{n+1} \mathbb{K}[X]$ pour n entier, on en déduit $P_{n+1} | P_n$. Par conséquent, la suite $(\deg P_n)_n$ est décroissante. Comme elle est à valeurs entières, elle est stationnaire et d'après la relation de divisibilité, la suite des polynômes unitaires est également stationnaire et on conclut

Une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$ stationne.

Remarque : Cette propriété est caractéristique des *anneaux noetheriens*, i.e. les anneaux dont les idéaux sont engendrés par un nombre fini d'éléments.

Exercice 6 (**)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples avec $\deg P > 1$.

1. Montrer que P' est également scindé à racines simples.
2. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients nuls consécutifs.

Corrigé : 1. Notons $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ les racines de P . D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$ pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ($n-1 \geq 1$) et par suite

Le polynôme P' est scindé à racines simples.

2. Une récurrence immédiate donne $P^{(k)}$ scindé à racines simples pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ avec $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Notons $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et supposons $a_p = a_{p+1} = 0$. On a

$$P^{(p)}(X) = \sum_{k=p}^n a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p} = X^2 \left(\sum_{k=p+2}^n a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p-2} \right)$$

Ceci contredit le caractère scindé à racines simples donc

Le polynôme P ne peut avoir deux coefficients nuls consécutifs.

Exercice 7 (**)

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer

$$\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k)$$

Corrigé : On note $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée à $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$, c'est-à-dire $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$. Supposons l'existence des λ_k . Par suite

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \int_0^1 L_k(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_k(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence. La synthèse est alors immédiate en écrivant la décomposition de P dans la base $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à savoir $P = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k$, ce qui prouve

$$\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k)$$

Exercice 8 (**)

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$$

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, déterminer $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P .
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Corrigé : 1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$c_k(P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n a_j \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt}_{=2\pi\delta_{j,k}}$$

Ainsi

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(P) = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \llbracket 0; n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$, il vient par conjugaison

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \overline{c_k(P)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{P(e^{it})}_{\in \mathbb{R}} e^{ikt} dt = c_{-k}(P)$$

On en déduit $c_k(P) = 0$ pour tout k entier relatif non nul puis $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Réciproquement, de tels polynômes sont solutions et on conclut

$$\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[X]$$

Exercice 9 (***)

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ unitaire. Montrer que toute racine ω de P vérifie

$$|\omega| \leq 1 + \max_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} |a_k|$$

Corrigé : On note $M = \max_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} |a_k|$. Si $|\omega| \leq 1$, l'inégalité est vraie. Supposons $|\omega| > 1$. On a

$$\omega^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k$$

d'où

$$|\omega|^n \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\omega|^k = M \frac{|\omega|^n - 1}{|\omega| - 1}$$

Comme $|\omega| - 1 > 0$, il vient $|\omega| - 1 \leq M \frac{|\omega|^n - 1}{|\omega|^n} \leq M$

Ainsi

$$|\omega| \leq 1 + \max_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} |a_k|$$

Exercice 10 (***)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On note $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Montrer $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad |a_k| \leq M$

Corrigé : Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. On a

$$\forall \ell \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(\omega^\ell) = \sum_{k=0}^n a_k \omega^{k\ell}$$

puis, en permutant les sommes, il vient

$$\sum_{\ell=0}^n P(\omega^\ell) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=0}^n \omega^{k\ell} = (n+1)a_0$$

d'où

$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n P(\omega^\ell)$$

Or

$$|a_0| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n |P(\omega^\ell)| \leq M$$

Plus généralement, pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on trouve

$$\sum_{\ell=0}^n P(\omega^\ell) \omega^{-p\ell} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=0}^n \omega^{\ell(k-p)} = (n+1)a_p$$

autrement dit

$$\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad a_p = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n P(\omega^\ell) \omega^{-p\ell}$$

Et on conclut comme précédemment, par inégalité triangulaire. Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad |a_k| \leq M$$

Variantes : 1. Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$$

Pour k entier, il vient par inégalité triangulaire

$$|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it}) e^{-ikt}| dt \leq N_1(P)$$

On observe que c'est la même idée de « moyenne » des coefficients de Fourier, dans sa version discrète puis continue.

2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. On a

$$\forall \ell \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(\omega^\ell) = \sum_{k=0}^n a_k \omega^{k\ell} \iff \begin{pmatrix} P(\omega^0) \\ \vdots \\ P(\omega^n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^n & \dots & \omega^{2n} \end{pmatrix}}_{=V} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

On vérifie $V\bar{V} = (n+1)I_{n+1}$ d'où

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad a_k = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n \bar{\omega}^{k\ell} P(\omega^\ell)$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 11 (***)

On définit $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Pour n entier non nul, on note

$$P_n = (X+1)^n - (X-1)^n \quad C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2$$

avec pour convention $\sum_{k=1}^0 \dots = 0$.

1. Pour n entier non nul, déterminer une écriture factorisée de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Notant $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ les racines de P_n , déterminer le coefficient de degré $\deg(P_n) - 2$ de P_n .
3. En déduire la valeur de C_n pour tout n entier non nul.

Corrigé : 1. Avec le binôme de Newton, on trouve

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k X^{n-k} = 2 \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} X^{n-(2k+1)}$$

Par suite

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \deg P_n = n-1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = 2n}$$

2. On a $P_1 = 2$. Soit $n \geq 2$. Le polynôme non constant P_n est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} P_n(\alpha) = 0 &\iff (\alpha+1)^n = (\alpha-1)^n \\ &\iff \alpha+1 = (\alpha-1)e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff \alpha = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} \quad \text{avec} \quad k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \end{aligned}$$

Par une factorisation d'angle moitié, on obtient

$$P_n(\alpha) = 0 \iff \alpha = -i \cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right) \quad \text{avec } k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \quad P_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i \cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)}$$

3. Soit $n \geqslant 1$. On a

$$P_n = 2 \binom{n}{1} X^{n-1} + 2 \binom{n}{3} X^{n-3} + \dots$$

puis

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \gamma_i \gamma_j \iff C_n = \frac{4 \binom{n}{3}}{\alpha_n}$$

On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad C_n = \frac{(n-1)(n-2)}{3}}$$