

RÉDUCTION

B. Landelle

Table des matières

I	Polynôme d'endomorphisme ou de matrice	3
1	Définitions	3
2	L'algèbre $\mathbb{K}[u]$	4
3	Lemme de décomposition des noyaux	4
II	Éléments propres	5
1	Définition	5
2	Propriétés	7
3	Point de vue matriciel	8
III	Polynôme caractéristique	9
1	Définition	9
2	Propriétés	10
3	Multiplicité	11
4	Théorème de Cayley-Hamilton	12
IV	Polynôme minimal	13
1	Définition	13
2	Propriétés	14
3	Lien avec l'algèbre $\mathbb{K}[u]$	15
V	Diagonalisation	15
1	Définition	15
2	Résultats de diagonalisation	15
3	Point de vue matriciel	16
4	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	17
VI	Trigonalisation	18
1	Définition	18
2	Résultats de trigonalisation	19
3	Techniques de trigonalisation	20
3.1	En dimension deux	20
3.2	En dimension trois	20
VII	Nilpotence	21
1	Définition, propriété	21
2	Nilpotence et réduction	22
3	Polynôme minimal scindé	23

VIII	Des applications de la réduction	24
1	Détermination d'une puissance p -ième	24
2	Réurrences croisées	25
3	Suites récurrentes linéaires	25

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$ -ev non nul avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Polynôme d'endomorphisme ou de matrice

Dans cette partie, toutes les définitions et propriétés peuvent être énoncées à l'identique pour $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se contentera, sauf cas particuliers, des énoncés vectoriels avec $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Définitions

Définition 1. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit le polynôme d'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ par

$$P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$$

avec $u^0 = \text{id}$ et $u^{k+1} = u^k \circ u$ pour k entier.

Remarque : Si E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E , on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} P(u) = P(\text{mat}_{\mathcal{B}} u)$. En effet, l'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), u \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ avec $n = \dim E$ est un morphisme d'algèbres d'où $\varphi(P(u)) = P(\varphi(u))$.

Proposition 1. Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les λ_i dans $\mathbb{K}$ et $T = D + N$ avec $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure stricte. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(D) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \quad \text{et} \quad P(T) = P(D) + Q$$

avec $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure stricte.

Démonstration. Soient u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ respectivement canoniquement associés à D et T . On note $\mathcal{C} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Une récurrence immédiate donne $u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ pour tout k entier. On note $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et on observe $v(F_i) \subset F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Soit k entier. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, supposant $v^k(e_i) = \lambda_i^k e_i + b_{i,k}$ avec $b_{i,k} \in F_{i-1}$, il vient

$$v^{k+1}(e_i) = \lambda_i v(e_i) + \underbrace{v(b_{i,k})}_{\in F_{i-1}} = \lambda_i^{k+1} e_i + b_{i,k+1} \quad \text{avec} \quad b_{i,k+1} \in F_{i-1}$$

ce qui clôt la récurrence. Le résultat suit pour $P(u)$ et $P(v)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ par combinaison linéaire. $\square$

Définition 2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que P est annulateur de u si $P(u) = 0$.

Définition 3. Soient u, v dans $\mathcal{L}(E)$. On dit que v est un polynôme en u s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$. On note

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$$

2 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Proposition 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E), P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres.

Démonstration. On a $\varphi(1) = \text{id}$. Soient P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + b_k) X^k \right) (u) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + b_k) u^k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k = \lambda P(u) + Q(u) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

Puis, avec $PQ = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} a_k b_\ell X^{k+\ell}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(PQ) &= \varphi \left(\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} a_k b_\ell X^{k+\ell} \right) = \left(\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} a_k b_\ell X^{k+\ell} \right) (u) \\ &= \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} a_k b_\ell u^{k+\ell} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k \right) \circ \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell u^\ell \right) = P(u) \circ Q(u) = \varphi(P) \circ \varphi(Q) \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Théorème 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est l'image du morphisme d'algèbres $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E), P \mapsto P(u)$ avec $\mathbb{K}[X]$ commutative. C'est par conséquent une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. $\square$

Théorème 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Démonstration. L'ensemble des polynômes annulateurs de u est le noyau du morphisme d'algèbres $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E), P \mapsto P(u)$. $\square$

3 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P, Q dans $\mathbb{K}[X]$. Si P et Q sont premiers entre eux, alors

$$\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$$

Démonstration. D'après le théorème de Bézout, il existe U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$ d'où

$$\text{id} = U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u)$$

Soit $x \in \text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u)$. Il vient

$$P(u)(x) = Q(u)(x) = 0 \implies \underbrace{[U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u)](x)}_{=\text{id}} = x = 0$$

Puis, soit $x \in \text{Ker}(PQ)(u)$. On a

$$x = \text{id}(x) = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x)$$

$$P(u) \circ [V(u) \circ Q(u)(x)] = V(u) \circ (PQ)(u)(x) = 0$$

et

$$Q(u) \circ [U(u) \circ P(u)(x)] = U(u) \circ (PQ)(u)(x) = 0$$

d'où

$$\text{Ker } (PQ)(u) \subset \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$$

Soit $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \text{Ker } P(u) \times \text{Ker } Q(u)$. On a

$$(PQ)(u)(x) = P(u) \circ Q(u)(x_1) + Q(u) \circ P(u)(x_2) = 0$$

Le résultat suit. $\square$

Remarque : Si $(PQ)(u) = 0$, alors $E = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$ et le projecteur p sur $\text{Ker } P(u)$ parallèlement à $\text{Ker } Q(u)$ est dans $\mathbb{K}[u]$. En effet, le calcul précédent montre que $p = (VQ)(u)$.

Théorème 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$. Si $P_1, \dots, P_n$ sont premiers entre eux deux à deux, alors

$$\text{Ker} \left(\prod_{k=1}^n P_k \right) (u) = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker } P_k(u)$$

Démonstration. On procède par récurrence en utilisant $\prod_{k=1}^{n-1} P_k \wedge P_n = 1$. $\square$

Exemple : Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{id}$. Montrer

$$E = \text{Ker } (f - \text{id}) \oplus \text{Im } (f - \text{id})$$

Avec la factorisation $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$, on trouve

$$E = \text{Ker } (f - \text{id}) \oplus \text{Ker } (f^2 + f + \text{id})$$

Reste à comparer $\text{Ker } (f^2 + f + \text{id})$ et $\text{Im } (f - \text{id})$. D'après la relation de Bézout, il existe A, B dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $A(X - 1) + B(X^2 + X + 1) = 1$ d'où $\text{id} = (f - \text{id}) \circ A(f) + B(f) \circ (f^2 + f + \text{id})$. Pour $x \in \text{Ker } (f^2 + f + \text{id})$, il s'ensuit $x \in \text{Im } (f - \text{id})$ et l'inclusion réciproque est facile.

II Éléments propres

1 Définition

Définition 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de u s'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$u(x) = \lambda x$$

Remarque : Sans la précision non nul, la définition serait creuse puisque $u(0_E) = \lambda 0_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur x de E non nul est appelé vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$u(x) = \lambda x$$

Vocabulaire : On dit que x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .

 **Avertissement :** Si on a $u(x) = \lambda x$ avec $x \in E$, on ne peut parler de vecteur propre qu'à condition d'avoir vérifié que x est non nul.

Exemples : 1. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme pour $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$, on a $D(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ avec $f_\lambda \neq 0$.
 2. Dans $E = \mathbb{K}^2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(x, y) = (x + y, x + y)$ pour tout $(x, y) \in E$. On a $u(1, -1) = (0, 0) = 0 \cdot (1, -1)$ d'où $(1, -1)$ vecteur propre associé à la valeur propre 0.
 3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(x, y) = (-y, x)$ pour tout $(x, y) \in E$. Pour λ réel, on a

$$u(x, y) = \lambda(x, y) \iff \begin{cases} x(1 + \lambda^2) = 0 \\ y = -\lambda x \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

L'endomorphisme u n'admet pas de vecteurs propres.

Proposition 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ non nul. On a

$$x \text{ vecteur propre de } u \iff \text{Vect}(x) \text{ stable par } u$$

Démonstration. Si $u(x) = \lambda x$, alors $u(\alpha x) = \alpha \lambda x \in \text{Vect}(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ ce qui prouve $u(\text{Vect}(x)) \subset \text{Vect}(x)$. Réciproquement, on a $u(x) \in u(\text{Vect}(x)) \subset \text{Vect}(x)$ d'où l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. $\square$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$, l'endomorphisme u défini par $u(x, y) = (-y, x)$ pour tout $(x, y) \in E$ n'admet pas de sev stables autres que $\{0_E\}$ et E .

Proposition 4. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq \{0_E\}$$

Si E est de dimension finie, on a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E) \\ &\iff \det(\lambda \text{id} - u) = 0 \iff \dim \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \geq 1 \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\} \mid (u - \lambda \text{id})(x) = 0_E \\ &\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq \{0_E\} \end{aligned}$$

En dimension finie, on sait que pour $g \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$\text{Ker } g = \{0_E\} \iff g \in \text{GL}(E) \iff \det(g) \neq 0$$

D'où par négation

$$\begin{aligned} \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq \{0_E\} &\iff \dim \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \geq 1 \\ &\iff u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E) \iff \det(\lambda \text{id} - u) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Remarque : En particulier, on a

$$0 \text{ valeur propre de } u \iff \text{Ker } u \neq \{0_E\} \iff u \text{ non injectif}$$

Et en dimension finie, on a 0 valeur propre de $u \iff \det(u) = 0$

Définition 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ le sev de E noté $E_\lambda(u)$ défini par

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$$

Remarque : Les vecteurs propres de u pour la valeur propre λ sont les éléments de $E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$.

Exemples : 1. Pour $u = \lambda \text{id}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (homothétie), on a λ unique valeur propre de u et $E_\lambda(u) = E$.

2. Soit p un projecteur de E avec $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ non réduits à $\{0_E\}$. Alors 0 et 1 sont valeurs propres de p et $E_0(p) = \text{Ker } p$ et $E_1(p) = \text{Ker}(p - \text{id}) = \text{Im } p$.

3. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour λ réel, on a $E_\lambda(D) = \text{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$ (résolution d'une EDL(1)).

Proposition 5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(u)(x) = P(\lambda)x$$

Démonstration. Par récurrence immédiate, on a $u^k(x) = \lambda^k x$ pour k entier puis, pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il vient

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$$

□

Proposition 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Démonstration. Soit λ valeur propre de u et x vecteur propre associé. On a $P(u)(x) = P(\lambda)x$ d'où $P(\lambda)$ valeur propre de $P(u)$. □

Proposition 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u . Alors, les valeurs propres de u sont parmi les racines de P .

Démonstration. Soit λ valeur propre de u et x vecteur propre associé. Pour P annulateur de u , on a $P(u)(x) = 0 = P(\lambda)x$ avec $x \neq 0_E$ d'où $P(\lambda) = 0$. □

2 Propriétés

Proposition 8. Soient u, v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .

Démonstration. Soit $x \in \text{Im } u$. Il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$. D'où $v(x) = v \circ u(t) = u \circ v(t) \in \text{Im } u$. De même soit $x \in \text{Ker } u$. On a $u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$ d'où $v(x) \in \text{Ker } u$. □

Proposition 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ valeur propre de u . Alors $E_\lambda(u)$ est stable par u et l'endomorphisme induit $u_{E_\lambda(u)}$ est $\lambda \text{id}_{E_\lambda(u)}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 8 appliquée avec u et $u - \lambda \text{id}$. De plus, on a

$$x \in E_\lambda(u) \iff (u - \lambda \text{id})(x) = 0 \iff u(x) = \lambda x$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Théorème 5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.

On a
$$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$$

Démonstration. Soit $(x_j)_{1 \leq j \leq p} \in \prod_{j=1}^p E_{\lambda_j}(u)$ tel que $\sum_{j=1}^p x_j = 0$. Soit $(L_i)_{1 \leq i \leq p}$ la famille de polynômes de Lagrange associés aux $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$. On a $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$. Il vient

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad L_i(u) \left(\sum_{j=1}^p x_j \right) = \sum_{j=1}^p L_i(u)(x_j) = \sum_{j=1}^p L_i(\lambda_j) x_j = x_i = 0_E$$

□

Remarque : On peut aussi procéder par récurrence mais c'est moins joli.

Corollaire 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de u est une famille libre.

Démonstration. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ famille de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0_E$. On a $\alpha_i x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ d'où par caractérisation d'une somme directe

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \alpha_i x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \alpha_i = 0$$

par non nullité des vecteurs propres x_i . □

Exemple : Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \rightarrow f'$, notant $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$, pour $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distincts, on a $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_p})$ libre.

3 Point de vue matriciel

Définition 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a 0 et 2 valeurs propres de A .

Définition 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ le sev de $\mathbb{K}^n$ noté $E_\lambda(A)$ défini par

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \text{Ker}(A - \lambda I_n) \\ &= E_\lambda(u_A) = \text{Ker}(u_A - \lambda \text{id}) \end{aligned}$$

où $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Toutes les définitions et propriétés des parties II.1 et II.2 peuvent être reformulées avec un point de vue matriciel. Par exemple :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff A - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de A . On a

$$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$$

Avertissement : Dans tout ce qui suit, on suppose E de dimension finie non nulle notée $\dim E = n$.

III Polynôme caractéristique

1 Définition

Proposition 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application définie sur $\mathbb{K}$ par $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ est polynomiale.

Démonstration. On a

$$\det(\lambda I_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [\lambda I_n - A]_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{i, \sigma(i)} - a_{i, \sigma(i)})$$

d'où le résultat. $\square$

Définition 9. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté χ_A défini par $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Remarque : On peut manipuler $\det(XI_n - A)$ comme un déterminant d'une matrice scalaire en considérant les coefficients à valeurs dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.

Théorème 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a χ_A unitaire de degré n et plus précisément

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \det(XI_n - A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [XI_n - A]_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (X\delta_{i, \sigma(i)} - a_{i, \sigma(i)}) \\ &= \prod_{i=1}^n (X - a_{i, i}) + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (X\delta_{i, \sigma(i)} - a_{i, \sigma(i)}) \end{aligned}$$

Pour $\sigma \neq \text{id}$, il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\sigma(i_0) \neq i_0$ et également $\sigma^2(i_0) \neq \sigma(i_0)$ par injectivité de σ d'où

$$\prod_{i=1}^n (X\delta_{i, \sigma(i)} - a_{i, \sigma(i)}) = a_{i_0, \sigma(i_0)} a_{\sigma(i_0), \sigma^2(i_0)} \prod_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0, \sigma(i_0)\}} (X\delta_{i, \sigma(i)} - a_{i, \sigma(i)})$$

qui est de degré $\leq n - 2$. Ainsi, les termes de degré n et $n - 1$ sont ceux de $\prod_{i=1}^n (X - a_{i, i}) =$

$X^n - \sum_{i=1}^n a_{i, i} X^{n-1} + \dots$. Pour le terme constant, on a $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ ce qui clôt la preuve. $\square$

Exemples : 1. Calcul de χ_J avec $J = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$. Faisant $C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^n C_i$ puis après factorisation $C_j \leftarrow C_j + C_1$, on trouve

$$\chi_J = (X - n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & X-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = (X - n)X^{n-1}$$

2. Calcul de $P_n = \chi_{A_n}$ avec $A_n = (\delta_{|i-j|,1})_{1 \leq i,j \leq n}$. On trouve $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(P_n(\lambda))_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

Proposition 11. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables. Alors $\chi_A = \chi_B$.

Démonstration. On a $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Il vient

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \det(P(XI_n - B)P^{-1}) = \det(P) \det(XI_n - B) \det(P^{-1}) = \chi_B$$

□

Définition 10. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle polynôme caractéristique de u le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ noté χ_u défini par $\chi_u = \chi_A$ avec $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ et $\mathcal{B}$ une base de E .

Remarque : Ceci est bien défini puisque χ_u est indépendant du choix d'une base d'après la proposition précédente.

Proposition 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$\chi_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$$

Démonstration. Immédiate.

□

2 Propriétés

Théorème 7. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \lambda \text{ racine de } \chi_u$$

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \lambda \text{ racine de } \chi_A$$

Démonstration. On a

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \det(\lambda \text{id} - u) = 0 \iff \lambda \text{ racine de } \chi_u$$

□

Définition 11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec E de dimension finie). On appelle spectre de u noté $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

Définition 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle spectre de A noté $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

Remarques : (1) Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pouvant être vue aussi comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on distingue le corps des scalaires considérés en notant $\text{Sp}_{\mathbb{C}}$ ou $\text{Sp}_{\mathbb{R}}$.

(2) Dans un $\mathbb{R}$ -ev, le spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice peut être vide. Par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $\chi_A = X^2 + 1$ non scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$ mais $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\pm i\}$.

Proposition 13. Deux matrices semblables ont même spectre.

Démonstration. Immédiate puisqu'elles ont même polynôme caractéristique. $\square$

Remarque : La réciproque est fausse. Avec $n \geq 2$, on peut considérer par exemple $A = I_n$ et $B = I_n + E_{1,n}$ qui ne sont pas semblables bien que $\chi_A = \chi_B = (X - 1)^n$.

Proposition 14. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev stable par u et $u_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par u sur F . Alors χ_{u_F} divise χ_u .

Démonstration. Dans une base $\mathcal{B}$ obtenue par complétion d'une base $\mathcal{B}_F$ de F , on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$ avec $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_F} u_F$. Puis

$$\chi_u = \left| \begin{array}{c|c} XI_r - A & -B \\ \hline 0 & XI_s - C \end{array} \right| \quad \text{avec } r = \dim F \text{ et } r + s = \dim E$$

Par suite, on a $\chi_u = \chi_A \times \chi_C$ avec $\chi_A = \chi_{u_F}$. $\square$

Proposition 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire, alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i}) \quad \text{et} \quad \text{Sp}(A) = \{a_{i,i}, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

Démonstration. Supposons A triangulaire supérieure (preuve identique dans le cas triangulaire inférieure). On a

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ 0 & X - a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$$

Le spectre s'en déduit puisqu'il est constitué des racines de χ_A . $\square$

Remarque : Le résultat précédent s'applique *a fortiori* à des matrices diagonales.

3 Multiplicité

Les définitions et résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

Définition 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u d'ordre de multiplicité m si λ est racine de χ_u d'ordre de multiplicité m . On note $m_\lambda(u)$ (ou plus simplement m_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de u) cet ordre de multiplicité.

Vocabulaire : On dit aussi valeur propre d'ordre m ou de multiplicité m .

Remarque : Pour $\lambda \notin \text{Sp}(u)$, on a $m_\lambda(u) = 0$.

Proposition 16. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E \quad \text{et} \quad = \dim E \iff \chi_u \text{ scindé dans } \mathbb{K}[X]$$

Démonstration. On a $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda} | \chi_u$ avec égalité si χ_u est scindé. Comme $\deg \chi_u = \dim E$, le résultat suit. $\square$

Proposition 17. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Alors

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$$

Démonstration. On a $E_\lambda(u)$ stable par u . Notons $u_\lambda = u|_{E_\lambda(u)}$. On a $u_\lambda = \lambda \text{id}_{E_\lambda(u)}$ d'où $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$. Comme χ_{u_λ} divise χ_u , le résultat suit. $\square$

Remarque : Si λ est une valeur propre simple (i.e. d'ordre 1), alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $1 \leq \dim E_0(A) = 1 < m_0(A) = 2$.

4 Théorème de Cayley-Hamilton

Le résultat vectoriel qui suit existe à l'identique pour des matrices.

Théorème 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\chi_u(u) = 0$.

Démonstration. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. La famille $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ est liée puisqu'elle contient $n + 1$ vecteurs. On pose

$$p = \max \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x, \dots, u^{k-1}(x)) \text{ libre}\}$$

Cet entier p est bien défini comme maximum d'une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide ((x) est libre) et majorée par n . Comme $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est liée, il existe des scalaires $a_0, \dots, a_{p-1}$ tels que $u^p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)$. En effet, on a

$$\text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \subset \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^p(x))$$

et $(x, \dots, u^{p-1}(x))$ libre $(x, \dots, u^p(x))$ liée

d'où l'égalité des dimensions et par suite

$$u^p(x) \in \text{Vect}(x, \dots, u^p(x)) = \text{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$$

et il en résulte que $\text{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u . On complète $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ en $\mathcal{B}$ une base de E . On pose $P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ et on note

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

On a la matrice par blocs $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{C}(P) & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ d'où $\chi_u = \chi_{\mathcal{C}(P)} \times \chi_B$. Avec l'opération

$L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^p X^{i-1} L_i$, on obtient

$$\chi_{\mathcal{C}(P)} = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X - a_{p-1} \end{vmatrix} = P$$

Par suite, on obtient $\chi_u(u)(x) = \chi_B(u) \circ P(u)(x) = 0$

Enfin, l'endomorphisme $\chi_u(u)$ s'annule évidemment en 0_E et le résultat est démontré.

Variante. Pour le calcul de $\chi_{\mathcal{C}(P)}$, on peut aussi procéder par récurrence sur le degré de P en développant sur la première ligne. On trouve

$$\chi_{\mathcal{C}(P)} = X\chi_{\mathcal{C}(Q)} - a_0 \quad \text{avec} \quad Q = X^{p-1} - \sum_{i=0}^{p-2} a_{i+1}X^i$$

L'hérédité permet de clore la récurrence. $\square$

Remarque : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On ne peut pas remplacer naïvement X par A dans $\det(XI_n - A)$, même si c'est tentant. En effet, ceci revient à remplacer $XI_n - A$ par zéro puis à calculer un déterminant alors qu'en développant le déterminant, le morphisme d'évaluation envoie $(XI_n - A)_{i,j} = X\delta_{i,j} - a_{i,j}$ sur $A\delta_{i,j} - a_{i,j}I_n$.

IV Polynôme minimal

Les définitions et résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

1 Définition

Proposition 18. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'idéal des polynômes annulateurs de u n'est pas réduit à $\{0\}$.

Démonstration. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, cet idéal contient χ_u polynôme non nul. $\square$

Remarque : Notant $n = \dim E$, on peut éviter le recours à Cayley-Hamilton en observant que $(\text{id}, u, \dots, u^{n^2})$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs dans $\mathcal{L}(E)$ de dimension n^2 d'où l'existence d'un polynôme annulateur de u .

Définition 14. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme minimal de u noté π_u le polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de u .

Remarques : (1) Comme l'idéal des polynômes annulateurs n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un unique polynôme unitaire qui l'engendre.

(2) En dimension infinie, cette définition reste valable à condition que l'idéal ne soit pas réduit à $\{0\}$ (ce qui n'est plus garanti).

Théorème 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme π_u est l'unique polynôme unitaire annulateur de u qui divise tout polynôme annulateur de u .

Démonstration. L'ensemble des polynômes annulant u étant un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ non réduit à $\{0\}$, le résultat suit par définition de π_u . $\square$

2 Propriétés

Proposition 19. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\deg \pi_u \geq 1$ et $\pi_u | \chi_u$.

Démonstration. Si $\deg \pi_u = 0$, alors $\pi_u = 1$ et par suite $\pi_u(u) = \text{id} \neq 0$. Puis, on a $\chi_u \in \pi_u \mathbb{K}[X]$ d'où $\pi_u | \chi_u$. $\square$

Proposition 20. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\deg \pi_u = 1$ si et seulement si $u \in \text{Vect}(\text{id})$.

Démonstration. Si $\deg \pi_u = 1$, alors $\pi_u = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et

$$\pi_u(u) = 0 \iff u - \alpha \text{id} = 0$$

Si $u = \alpha \text{id}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $X - \alpha$ est annulateur de u or $\pi_u | X - \alpha$ et $\deg \pi_u \geq 1$ avec π_u unitaire d'où $\pi_u = X - \alpha$. $\square$

Théorème 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de π_u sont exactement les valeurs propres de u .

Démonstration. Comme π_u est annulateur de u et divise χ_u , on a

$$\text{Sp}(u) \subset \pi_u^{-1}(\{0\}) \subset \chi_u^{-1}(\{0\}) = \text{Sp}(u)$$

Les inclusions sont donc des égalités. $\square$

Proposition 21. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors, on a $\pi_{\text{mat}_{\mathcal{B}} u} = \pi_u$.

Démonstration. On pose $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ puis $\varphi_A : P \mapsto P(A)$ et $\varphi_u : P \mapsto P(u)$. On a

$$\pi_A \mathbb{K}[X] = \text{Ker } \varphi_A = \text{Ker } \varphi_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$$

Ainsi, les polynômes π_A et π_u sont associés et unitaires donc égaux. $\square$

Proposition 22. Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

Démonstration. Conséquence de la propriété précédente. $\square$

Proposition 23 (À refaire). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé à racines simples, alors on a $\pi_u = \chi_u$.

Démonstration. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a $X - \lambda$ divise π_u et comme les $X - \lambda$ sont premiers entre eux pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on en déduit $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda) | \pi_u$ autrement dit $\chi_u | \pi_u$ et les deux polynômes sont donc associés unitaires et par conséquent égaux. $\square$

Exemples : 1. On a $\pi_{\text{id}} = X - 1$ et $\chi_{\text{id}} = (X - 1)^{\dim E}$.

2. Pour p projecteur avec $p \neq \text{id}$ et $p \neq 0$, on a $\pi_p = X^2 - X$ et $\chi_p = X^{\dim \text{Ker } p} (X - 1)^{\text{rg}(p)}$.

3. Soit $A = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$. On a $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - i)$ et $\pi_A = \chi_A$.

3 Lien avec l'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Théorème 11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $d = \deg \pi_u$. La famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Démonstration. Soit p entier. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe Q, R dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $X^p = \pi_u Q + R$ avec $\deg R < \deg \pi_u$. En évaluant en u , il vient

$$u^p = \pi_u(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u) \in \text{Vect}(u^k)_{k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket}$$

Une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille équivaut à écrire $R(u) = 0$ avec $\deg R < \deg \pi_u$. Si R n'est pas nul, on aurait un polynôme annulateur de u non divisible par π_u ce qui est absurde. Le résultat suit. $\square$

Corollaire 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\dim \mathbb{K}[u] \leq \dim E$.

Démonstration. On a $\pi_u | \chi_u$ d'où $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u \leq \deg \chi_u = \dim E$. $\square$

V Diagonalisation

1 Définition

Définition 15. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ soit diagonale. La base $\mathcal{B}$ est dite base de diagonalisation.

Remarque : Notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$$

Les termes diagonaux sont alors les valeurs propres de u et $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u .

Proposition 24. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a u diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u . Une telle base est base de diagonalisation.

Démonstration. Immédiate. $\square$

Exemples : Homothéties vectorielles, projecteurs, symétries dans des bases adaptées.

2 Résultats de diagonalisation

Théorème 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u diagonalisable ;
2. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$
3. $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u)$
4. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_{\lambda}(u) = m_{\lambda}(u)$.

Démonstration. Supposons u diagonalisable. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1; n]}$ une base de diagonalisation.

On a
$$\forall i \in [1; n] \quad e_i \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

D'où
$$E = \text{Vect}(e_i)_{i \in [1; n]} \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset E$$

et l'égalité souhaitée s'en déduit. Réciproquement, une base adaptée à la décomposition est une base de diagonalisation d'où le résultat. On a

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$$

d'où l'équivalence (2) $\iff$ (3). On a $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) \leq$

$\dim E$ d'où $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E$. Par suite

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) = \dim E$$

L'équivalence (3) $\iff$ (4) en résulte. $\square$

Remarque : En pratique, pour diagonaliser un endomorphisme (ou une matrice), on construit une base adaptée à la décomposition en somme directe.

Exemples : Projecteurs et symétries dans des bases adaptées.

Corollaire 3 (Condition suffisante de diagonalisation). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. Si u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Démonstration. On a $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset E$ puis

$$\dim E \geq \dim \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \underbrace{\dim E_\lambda(u)}_{\geq 1} \geq \text{Card Sp}(u) = \dim E$$

d'où
$$\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = 1$$

Variante. Les valeurs propres sont exactement les racines de χ_u et $\deg \chi_u = \dim E$ d'où χ_u est scindé à racines simples et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u) = 1$$

Le résultat suit. $\square$

3 Point de vue matriciel

Définition 16. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est diagonalisable.

Proposition 25. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Démonstration. Immédiate. □

Remarque : Les termes diagonaux de cette matrice diagonale sont alors les valeurs propres de A.

Le théorème fondamental de diagonalisation et son corollaire, la condition suffisante de diagonalisation existe à l'identique en version matricielle.

Exemples : 1. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Oui puisqu'elles sont toutes deux semblables à $\text{diag}(1, 2)$, la condition suffisante de diagonalisation s'appliquant.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Non car on a $\text{rg}(A - I_3) = 2$ d'où $\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A)$.

Proposition 26. Notons $\mathcal{C}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On a $P^{-1}AP$ diagonale $\iff P$ matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres de A

Démonstration. Immédiate puisque $P^{-1}AP$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A écrit dans une base dont le passage depuis la base canonique est réalisé par la matrice P. □

Exemples : 1. Réduction de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On trouve $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 3)$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Réduction de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

On trouve $P^{-1}BP = \text{diag}(5, 5, 0)$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Théorème 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u diagonalisable ;
2. il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u ;
3. π_u est scindé à racines simples.

Démonstration. Supposons u diagonalisable. Soit $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres de u . Pour $x \in \mathcal{B}$, on a $u(x) = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{K}$. On pose $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$. On a

$$P = \left[\prod_{\lambda \neq \mu} (X - \lambda) \right] (X - \mu)$$

D'où

$$P(u)(x) = (\dots)(u) \circ (u - \mu \text{id})(x) = 0$$

Ainsi, $P(u)$ s'annule sur une base de E donc $P(u) = 0$ et P est scindé à racines simples. S'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u , alors π_u est également à racines simples puisque π_u divise ce polynôme annulateur. Enfin, supposons π_u scindé à racines simples, autrement dit $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$. Avec le lemme des noyaux, il vient

$$E = \text{Ker } \pi_u(u) = \text{Ker } \bigcirc_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (u - \lambda \text{id}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

□

Remarque : On dispose du même résultat pour des matrices.

Proposition 27. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F sev stable par u . Alors π_{u_F} divise π_u .

Démonstration. On a $\pi_u(u_F) = 0_{\mathcal{L}(F)}$ puisque $\pi_u(u_F)(x) = \pi_u(u)(x)$ pour $x \in F$. Le résultat suit. □

Théorème 14. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F sev stable par u . Si u est diagonalisable, alors u_F l'est aussi.

Démonstration. Comme π_{u_F} divise π_u qui est scindé à racines simples, alors π_{u_F} l'est aussi et le résultat suit. □

VI Trigonalisation

1 Définition

Définition 17. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire supérieure. La base $\mathcal{B}$ est dite base de trigonalisation.

Remarque : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de trigonalisation de u . On note $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(e_k) \in F_k \quad \text{et} \quad u(F_k) \subset F_k$$

Définition 18. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 28. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a A trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est trigonalisable.

Démonstration. Immédiate. □

Remarque : Une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable. En effet, si $A = \text{mat}_{\mathcal{C}} u$ est triangulaire inférieure avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\text{mat}_{\mathcal{L}} u$ est triangulaire supérieure avec $\mathcal{L} = (e_n, \dots, e_1)$.

2 Résultats de trigonalisation

Les résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

Théorème 15. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Pour le sens indirect, on procède par récurrence sur $n = \dim E$. C'est immédiat pour $n = 1$. Supposons que la propriété est vraie en dimension $n - 1$. Comme χ_u est scindé, il existe au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit x vecteur propre associé. On complète (x) en une base $\mathcal{B}$ de E . Ainsi, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

On a $\chi_u = (X - \lambda)\chi_A$ et comme χ_u est scindé, il en résulte que χ_A l'est aussi. Par hypothèse de récurrence appliquée à l'endomorphisme canoniquement associée à A , il existe $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}AQ$ est triangulaire. On définit la matrice diagonale par blocs $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$. Sans difficulté, c'est une matrice inversible d'inverse $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array} \right)$. En effectuant des produits par blocs, il vient

$$P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A \end{array} \right) P = P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & LQ \\ \hline 0 & AQ \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & LQ \\ \hline 0 & Q^{-1}AQ \end{array} \right)$$

qui est triangulaire ce qui clôt la récurrence. $\square$

Corollaire 4. Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie est trigonalisable. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration. Conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}[X]$. $\square$

Remarques : (1) Dans E un $\mathbb{C}$ -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$.

(2) Le résultat du corollaire est faux dans un $\mathbb{R}$ -ev. En considérant $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = X^2 + 1$ non scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Selon le corps des scalaires considérés, les résultats de réduction matricielle peuvent changer radicalement. Avec l'exemple précédent, on a A diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et non trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 29. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable, alors

$$\det(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u , répétées avec leurs multiplicités.

Démonstration. Il suffit de considérer une base de trigonalisation de u . $\square$

Remarque : Le résultat sur la trace est très utile en pratique pour vérifier la cohérence du calcul d'un polynôme caractéristique de matrice.

3 Techniques de trigonalisation

3.1 En dimension deux

Proposition 30. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et non diagonalisable avec $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$. On a

$$\exists \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ base de } E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Soit (e_1, e_2) une base de E . On choisit $i_0 \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id})(e_{i_0}) \neq 0_E$ (choix possible puisque $u - \lambda \text{id} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car u n'est pas diagonalisable, au plus deux essais). On pose alors

$$\varepsilon_2 = e_{i_0} \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

On vérifie la liberté de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et compte-tenu des choix des vecteurs, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ de la forme souhaitée.

3.2 En dimension trois

Proposition 31. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable non diagonalisable. Si $\text{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$, λ valeur propre double, on a

$$\exists \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ base de } E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E . On cherche $i_0 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id}) \circ (u - \mu \text{id})(e_{i_0}) \neq 0_E$ (choix possible puisque $(u - \lambda \text{id}) \circ (u - \mu \text{id}) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car u n'est pas diagonalisable, au plus trois essais). On pose alors

$$\varepsilon_2 = (u - \mu \text{id})(e_{i_0}) \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

que l'on complète en déterminant (ε_3) base de $E_\mu(u)$. On vérifie la liberté de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et compte-tenu du choix des vecteurs, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ de la forme souhaitée.

Proposition 32. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable non diagonalisable. Si $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$, on a

1. Si $(u - \lambda \text{id})^2 \neq 0$, $\exists \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de $E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. Si $(u - \lambda \text{id})^2 = 0$, $\exists \mathcal{B} = \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de $E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E . Avec $\text{rg}(u - \lambda \text{id})$, on détermine si on est dans la configuration 1 ou 2.

1. On cherche $i_0 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id})^2(e_{i_0}) \neq 0_E$ (choix possible car $(u - \lambda \text{id})^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, au plus trois essais). On pose alors

$$\varepsilon_3 = e_{i_0} \quad \varepsilon_2 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_3) \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

On vérifie la liberté de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et compte-tenu du choix des vecteurs, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}u$ de la forme souhaitée.

2. On choisit $i_0 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id})(e_{i_0}) \neq 0_E$ (choix possible puisque $u - \lambda \text{id} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car u non diagonalisable, au plus trois essais). On pose alors

$$\varepsilon_2 = e_{i_0} \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

et on complète (ε_1) en base $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ de $E_\lambda(u)$. On vérifie la liberté de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et compte-tenu du choix des vecteurs, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}u$ de la forme souhaitée.

Remarque : Les formes réduites obtenues sont dites *réduites de Jordan*.

Exemple : Réduire

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Puis $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

VII Nilpotence

Les définitions et résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

1 Définition, propriété

Définition 19. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe k entier non nul tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier p non nul vérifiant cette propriété est appelée indice ou ordre de nilpotence de u .

Remarques : (1) L'entier $p = \min \{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\}$ est bien défini comme minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}^*$.

(2) Soit $\mathcal{B}$ une base de E . On a u nilpotente si et seulement si $\text{mat}_{\mathcal{B}}u$ l'est puisque $\text{mat}_{\mathcal{B}}u^k = (\text{mat}_{\mathcal{B}}u)^k$ pour tout k entier et dans ce cas, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}u$ et l'endomorphisme u ont même ordre de nilpotence.

Proposition 33. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p . On a $\pi_u = X^p$.

Démonstration. On a $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ d'où $\pi_u | X^p$ et X^k avec $k < p$ non annulateur de u d'où le résultat. $\square$

Proposition 34. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. L'indice de nilpotence p de u vérifie $p \leq n$.

Démonstration. Comme $\pi_u = X^p | \chi_u$, il s'ensuit que $p \leq n$.

Variante. On peut éviter le recours à Cayley-Hamilton. Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrons la liberté de $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$. Soit $(\alpha_i)_{i \in [0; p-1]} \in \mathbb{K}^p \setminus \{0_{\mathbb{K}^p}\}$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$. Notons $\ell = \min \{i \in [0; p-1] \mid \alpha_i \neq 0\}$. On a

$$u^{p-1-\ell} \left(\sum_{i=\ell}^{p-1} \alpha_i u^i(x) \right) = \alpha_\ell u^{p-1}(x) = 0 \implies \alpha_\ell = 0$$

ce qui contredit la définition de ℓ . On en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [0; p-1]$ et le cardinal d'une famille libre étant majoré par la dimension de l'espace, on obtient $p \leq n$. $\square$

Proposition 35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire supérieure stricte, alors A est nilpotente.

Démonstration. On a $\chi_A = X^n$ et $\chi_A(A) = A^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. $\square$

Remarque : Résultat généralisé plus bas.

2 Nilpotence et réduction

Théorème 16. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$u \text{ nilpotent} \iff u \text{ trigonalisable et } \text{Sp}(u) = \{0\}$$

Démonstration. Supposons u nilpotent et soit p indice de nilpotence. Soit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ avec $\mathcal{B}$ une base de E . On a $\pi_A = \pi_u = X^p$ d'où $\text{Sp}(u) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$. Considérant A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, unitaire, de degré égal à n avec zéro pour seule racine, il s'ensuit que $\chi_A = X^n$. On a donc aussi $\chi_u = X^n$ d'où u trigonalisable (même si le corps des scalaires de E n'est pas $\mathbb{C}$). Réciproquement, on suppose u trigonalisable avec $\text{Sp}(u) = \{0\}$. Dans une base de trigonalisation $\mathcal{B}$, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire stricte donc nilpotente.

Variante pour la réciproque. On peut éviter le recours à Cayley-Hamilton (utilisé lors de la proposition 35). On montre par récurrence forte $u^k(e_k) = 0$ pour tout $k \in [1; n]$ d'où $u^n = 0$ ce qui prouve le résultat. On peut aussi poser $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, vérifier que $u(F_k) \subset F_{k-1}$ puis montrer par récurrence que $u^k(F_n) \subset F_{n-k}$ d'où $u^n(F_n) = \{0_E\}$. $\square$

Corollaire 5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a u nilpotent si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire supérieure stricte.

Démonstration. Conséquence immédiate du résultat précédent. $\square$

Corollaire 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a A nilpotente si et seulement A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Démonstration. Traduction matricielle du corollaire précédent. $\square$

3 Polynôme minimal scindé

Théorème 17. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ annulateur de u (les α_λ entiers non nuls). On a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda \quad \text{avec} \quad F_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda} \text{ stable par } u$$

et il existe $\mathcal{B} = \biguplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$ base adaptée à cette décomposition en somme directe telle que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda} u_{F_\lambda} = \lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda \text{ avec } T_\lambda \text{ triangulaire supérieure stricte}$$

En particulier, on a $\dim F_\lambda = m_\lambda$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $\mathcal{B}$ est une base de trigonalisation.

Démonstration. D'après le lemme des noyaux, il vient

$$E = \text{Ker } P(u) = \text{Ker} \bigcirc_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda} = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda \quad \text{avec} \quad F_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda}$$

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. On a F_λ stable par u car u commute avec $(u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{K}[u]$. Notant $n_\lambda = u_{F_\lambda} - \lambda \text{id}_{F_\lambda}$, on a $n_\lambda \in \mathcal{L}(F_\lambda)$ et $n_\lambda^{\alpha_\lambda} = 0$. D'après le corollaire précédent, il existe $\mathcal{B}_\lambda$ base de F_λ telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda} n_\lambda$ soit triangulaire supérieure stricte. Ainsi, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda} u_{F_\lambda}$ est triangulaire supérieure. En concaténant $\mathcal{B} = \biguplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation de u et on a

$$\chi_u = \det(XI_n - \text{mat}_{\mathcal{B}} u) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\dim F_\lambda} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

la dernière expression de χ_u résultant de son caractère scindé. Il s'ensuit

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \dim F_\lambda = m_\lambda$$

□

Théorème 18. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est trigonalisable ;
2. il existe un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$ annulateur de u ;
3. le polynôme minimal π_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

On peut alors décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u sur lesquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) On a χ_u scindé et annulateur de u .

(2) $\implies$ (3) Immédiat car π_u est annulateur de u et divise tout polynôme annulateur de u donc est scindé en tant que diviseur d'un polynôme scindé.

(3) $\implies$ (1) On applique le théorème précédent avec π_u qui est scindé et dont les racines sont les éléments de $\text{Sp}(u)$. □

Théorème 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est trigonalisable ;
2. A est semblable à une matrice diagonale par blocs $\text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$ avec les T_λ des matrices triangulaires supérieures strictes ;
3. A est semblable à une matrice diagonale par blocs $\text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + N_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$ avec les N_λ des matrices nilpotentes.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $E = \mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . On a u trigonalisable. Ainsi, χ_u (ou π_u) est scindé et on applique le résultat du théorème 17.

(2) $\implies$ (3) Immédiate car une matrice triangulaire stricte est nilpotente.

(3) $\implies$ (1) Soit $B = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + N_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$ semblable à A avec les N_λ nilpotentes. Pour chaque λ , il existe $P_\lambda \in \text{GL}_{m_\lambda}(\mathbb{K})$ telle que $P_\lambda^{-1} N_\lambda P_\lambda$ triangulaire supérieure stricte. Avec $P = \text{diag}(P_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$, on a P inversible et $P^{-1}BP$ triangulaire supérieure (produit par blocs). Comme A est semblable à B , le résultat suit par transitivité. $\square$

Définition 20. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé dans $\mathbb{K}[X]$ d'où $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$. On appelle sous-espaces caractéristiques de u les sev $\text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{m_\lambda}$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

Corollaire 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé dans $\mathbb{K}[X]$ d'où $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$. On a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{m_\lambda}$$

et il existe une base adaptée $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition en somme directe telle que

$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ avec les T_λ des matrices triangulaires supérieures strictes

Démonstration. C'est le théorème 17 appliqué avec $P = \chi_u$. $\square$

Remarque : En pratique, c'est souvent le polynôme caractéristique χ_u qui est le polynôme annulateur de u le plus accessible pour appliquer ce résultat.

VIII Des applications de la réduction

1 Détermination d'une puissance p -ième

- Cas où A diagonalisable

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \mid A = PDP^{-1} \implies A^p = PD^pP^{-1}$$

- Cas où A trigonalisable

$$\exists (B, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = B + N \quad \text{avec} \quad B \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente et } BN = NB$$

En effet, on a A semblable à $D + T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_r I_{m_r})$ et $T = \text{diag}(T_1, \dots, T_r)$ et un produit par blocs montre que $DT = TD$. Soit ℓ indice de nilpotence de N . On applique la formule du binôme (car commutation)

$$A^p = (B + N)^p = \sum_{k=0}^{\min(p, \ell-1)} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k$$

L'intérêt de ce développement est qu'il contient au plus ℓ termes, même si p est très grand.

- Avec un polynôme annulateur

Si P est annulateur de A , il existe $(Q_p, R_p) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $X^p = PQ_p + R_p$ avec $\deg R_p < \deg P$ d'où

$$A^p = R_p(A)$$

2 Récurrences croisées

Résolution de problème de la forme $X_{n+1} = AX_n$ pour n entier avec $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et détermination de X_n pour un n fixé. La suite (matricielle) $(X_n)_n$ suit une progression géométrique. Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$$

On s'est donc ramené à un problème de détermination de puissance d'une matrice.

Exemple : Expressions des suites (a_n) et (b_n) vérifiant $\begin{cases} a_{n+1} = -2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$.

Posons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Le problème s'écrit matriciellement $X_{n+1} = AX_n$. On réduit A ou on utilise le fait que $\chi_A(A) = 0 \dots$

3 Suites récurrentes linéaires

Définition 21. Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est récurrente linéaire d'ordre p (*SRL(p)* en abrégé) si elle vérifie une relation de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n \quad (\text{H})$$

avec $a_0, \dots, a_{p-1}$ des scalaires et $a_0 \neq 0$.

Théorème 20. Soient $a_0, \dots, a_{p-1}$ des scalaires avec $a_0 \neq 0$ et la relation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n \quad (\text{H})$$

L'espace S_H des solutions est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension p .

Démonstration. C'est clairement un sev de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Posant $P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$, $E = \mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $\sigma : E \rightarrow E, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$, on a $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ et on peut aussi observer $S_H = \text{Ker } P(\sigma)$ (remarque culturelle). L'application $\Phi_0 : S_H \rightarrow \mathbb{K}^p, (u_n)_n \mapsto (u_0, \dots, u_{p-1})$ est un isomorphisme d'après le principe de récurrence (injective et surjective). En effet, la suite $(u_n)_n$ est complètement déterminée par ses p premiers termes et on peut les choisir arbitrairement. $\square$

Proposition 36. Soit $(u_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n$$

avec $a_0, \dots, a_{p-1}$ des scalaires et $a_0 \neq 0$. Posant $X_n^\top = (u_n \dots u_{n+p-1})$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix}}_{=A} X_n = AX_n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$$

Vocabulaire : On appellera A la matrice *compagne* (ou *compagnon*) de la suite $(u_n)_n$.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n \end{pmatrix}$$

La relation vectorielle obtenue est géométrique et une récurrence immédiate fournit le résultat sur X_n . $\square$

Remarque : On se ramène donc à un calcul de puissance matricielle.

Théorème 21. Soit la relation récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (H)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. L'équation caractéristique (R) est

$$r^2 - ar - b = 0$$

1. Si (R) admet deux racines α, β distinctes

$$(u_n)_n \in S_H \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$$

2. Si (R) admet une racine double α

$$(u_n)_n \in S_H \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\lambda + \mu n)\alpha^n$$

3. Si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et (R) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \not\equiv 0 [\pi]$

$$(u_n)_n \in S_H \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

Remarque : Le troisième cas (qui est un sous-cas du premier) fournit une solution réelle pour une équation à coefficients réels.

Démonstration. Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $\sigma : E \rightarrow E, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. On a clairement $\sigma \in \mathcal{L}(E)$. Notant $P = X^2 - aX - b$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \iff (u_n)_n \in \text{Ker } P(\sigma)$$

1. Si (R) admet deux racines distinctes α et β , il vient d'après le lemme des noyaux

$$\text{Ker } P(\sigma) = \text{Ker } (\sigma - \alpha \text{id}) \oplus \text{Ker } (\sigma - \beta \text{id})$$

d'où le résultat.

3. Si (R) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ ($\rho > 0$ et $\theta \not\equiv 0[\pi]$), notant $\alpha = \rho e^{i\theta}$, la suite $(\alpha^n)_n$ est solution d'après le cas 1, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha^{n+2} = a\alpha^{n+1} + b\alpha^n$$

et considérant partie réelle et imaginaire, les suites $(\rho^n \cos(n\theta))_n$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_n$ sont des solutions réelles. Enfin, elles forment une famille libre donc constitue une base du plan vectoriel réel $\text{Ker } P(\sigma)$.

2. Si (R) admet une racine double α (non nulle), on pose $e_\alpha = (\alpha^n)_n$ et $u = e_\alpha v$ pour $u \in E$ (c'est-à-dire $v = e_{1/\alpha} u$). On trouve $(\sigma - \alpha \text{id})(u) = \alpha e_\alpha (\sigma - \text{id})(v)$ puis

$$(\sigma - \alpha \text{id})^2(u) = \alpha^2 e_\alpha (\sigma - \text{id})^2(v) = 0 \iff v \in \text{Ker } (\sigma - \text{id})^2$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\sigma - \text{id})^2(v)_n = v_{n+2} - 2v_{n+1} - v_n = v_{n+2} - v_{n+1} - (v_{n+1} - v_n)$$

Ainsi, on a $v \in \text{Ker}(\sigma - \text{id})^2$ si et seulement si la suite $(v_{n+1} - v_n)_n$ est constante, autrement dit $v_n = \lambda + \mu n$ pour n entier avec λ, μ scalaires. Le résultat suit. $\square$

Remarque : On a $\text{Ker } \sigma = \text{Vect}((\delta_{0,n})_n)$ et $\text{Ker } \sigma^2 = \text{Vect}((\delta_{0,n})_n, (\delta_{1,n})_n)$. On peut ainsi compléter la description des solutions sans l'hypothèse b non nul.

Annexes

Proposition 29. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et non diagonalisable avec $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$. On a

$$\exists \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ base de } E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2) une base de E . On a χ_u scindé mais pas à racines simples sinon u serait diagonalisable d'où $\chi_u = (X - \lambda)^2$. On choisit $i_0 \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id})(e_{i_0}) \neq 0_E$. Ce choix est possible car si $u - \lambda \text{id}$ s'annule sur la base (e_1, e_2) , alors on aurait $u = \lambda \text{id}$. On pose alors

$$\varepsilon_2 = e_{i_0} \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

On applique $u - \lambda \text{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et, en utilisant $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on obtient la liberté de $\mathcal{B}$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ a la forme attendue. $\square$

En dimension trois

Proposition 30. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable non diagonalisable. Si $\text{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$, λ valeur propre double, on a

$$\exists \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ base de } E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E . On a $\chi_u = (X - \lambda)^2(X - \mu)$. On choisit $i_0 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id}) \circ (u - \mu \text{id})(e_{i_0}) \neq 0_E$. Ce choix est possible car si $(u - \lambda \text{id}) \circ (u - \mu \text{id})$ s'annule sur la base (e_1, e_2, e_3) , alors cette application est nulle et on aurait $(X - \lambda)(X - \mu)$ scindé à racines simples et annulateur de u qui contredit u non diagonalisable. On pose alors

$$\varepsilon_2 = (u - \mu \text{id})(e_{i_0}) \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

que l'on complète en déterminant (ε_3) base de $E_\mu(u)$. On applique $(u - \lambda \text{id})^2$ puis $u - \lambda \text{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et, en utilisant $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on obtient la liberté de $\mathcal{B}$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ a la forme attendue. $\square$

Proposition 31. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable non diagonalisable. Si $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$, on a

1. Si $(u - \lambda \text{id})^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, $\exists \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de $E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. Si $(u - \lambda \text{id})^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $\exists \mathcal{B} = \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de $E \mid \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Démonstration. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E . On a $\chi_u = (X - \lambda)^3$.

1. Si $(u - \lambda \text{id})^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, on cherche $i_0 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id})^2(e_{i_0}) \neq 0_E$. On pose alors

$$\varepsilon_3 = e_{i_0} \quad \varepsilon_2 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_3) \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

On applique $(u - \lambda \text{id})^2$ puis $u - \lambda \text{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et, en utilisant $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$, on obtient la liberté de $\mathcal{B}$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ a la forme attendue.

2. Si $(u - \lambda \text{id})^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$, on choisit $i_0 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ tel que $(u - \lambda \text{id})(e_{i_0}) \neq 0_{\mathbb{E}}$. Ce choix est possible car si $u - \lambda \text{id}$ s'annule sur la base (e_1, e_2, e_3) , alors on aurait $u = \lambda \text{id}$. On pose alors

$$\varepsilon_2 = e_{i_0} \quad \varepsilon_1 = (u - \lambda \text{id})(\varepsilon_2)$$

et on complète (ε_1) en base $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ de $E_\lambda(u)$. Ceci est possible. En effet, on a $\text{Im}(u - \lambda \text{id}) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$ et $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq E$. D'après le théorème du rang et l'inclusion précédente, on a $\text{rg}(u - \lambda \text{id}) = 1$ et $\dim \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) = 2$. Enfin, on applique $u - \lambda \text{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et, en utilisant $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$, on obtient la liberté de $\mathcal{B}$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ a la forme attendue. $\square$

Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

On propose une preuve différente du théorème de résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

Théorème 21. Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre deux vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\text{H})$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. L'équation caractéristique (R) est

$$r^2 - ar - b = 0$$

1. Si (R) admet deux racines α, β distinctes, alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

2. Si (R) admet une racine double α , alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\lambda + \mu n) \alpha^n$$

3. Si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et (R) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

Démonstration. On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -b & X - a \end{vmatrix} = X^2 - aX - b$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc exactement les valeurs propres de A .

1. Si (R) admet deux racines distinctes α, β , la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ d'après la condition suffisante de diagonalisation et il existe donc $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(\alpha, \beta)$ telle que $A = PDP^{-1}$ puis $A^n = PD^nP^{-1}$ pour n entier et ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

3. Si (R) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ et $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, Le résultat précédent s'applique d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda \rho^n e^{in\theta} + \mu \rho^n e^{-in\theta}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Les suite $(\operatorname{Re} \rho^n e^{in\theta})_n$ et $(\operatorname{Im} \rho^n e^{in\theta})_n$ sont solutions réelles et on vérifie sans peine qu'elles forment une famille libre donc une base du plan vectoriel réel S_H .

3. Si (R) admet une racine double α , la matrice A n'est pas diagonalisable sinon elle serait semblable à αI_2 donc égale à cette matrice. Il existe $P \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Une récurrence ou une application du binôme donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

Puis
$$u_n = \lambda\alpha^n + \nu n\alpha^{n-1} = \alpha^n(\lambda + n\nu/\alpha)$$

avec (λ, ν) des scalaires et $\alpha \neq 0$ car $\chi_A(0) = b \neq 0$. □