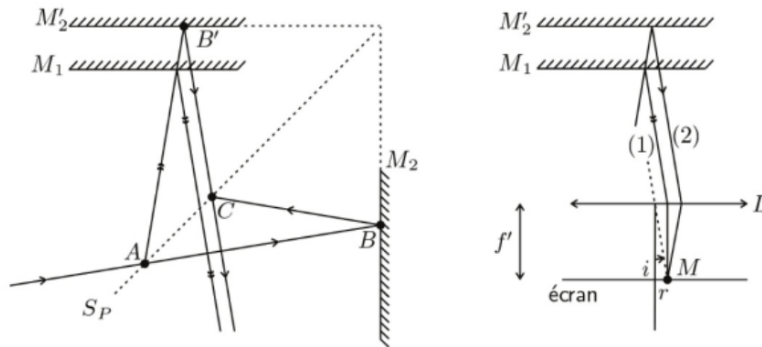


TD 5 : Optique (2)

1 Interféromètre à division d'amplitude

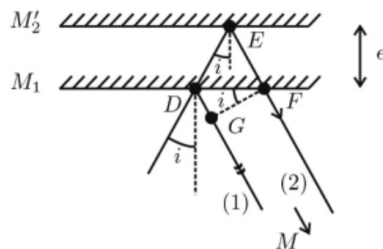
Exercice 1: Michelson en lame d'air (★)

- On est au contact optique. La différence de marche est nulle. L'écran est uniformément éclairé. On observe une teinte plate brillante.
- On utilise le schéma équivalent du Michelson en lame d'air : M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice. Les distances AB et AB' sont égales ainsi que les distances BC et $B'C$.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en lame d'air.

- Les rayons (1) et (2) sont parallèles entre eux. Les interférences sont localisées à l'infini pour un Michelson réglé en lame d'air avec une source étendue. On les observe en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille.



4.

On a deux réflexions sur un miroir qui ajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre les rayons (2) et (1) arrivant au point M est :

$$\delta = [DEFM] - [DGM]$$

En utilisant le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan GF serait un plan d'onde et $[GM] = [FM]$. On a alors :

$$\delta = [DEF] - [DG] = 2DE - DG$$

Avec $\cos(i) = \frac{e}{DE}$, on a :

$$2DE = \frac{2e}{\cos(i)}$$

D'autre part, $\tan(i) = \frac{DF/2}{e}$, d'où :

$$DF = 2e \tan(i)$$

Or, $\sin i = \frac{DG}{DF}$, donc :

$$DG = DF \sin(i) = 2e \tan(i) \sin(i)$$

Finalement, on obtient :

$$\delta = \frac{2e}{\cos(i)} - 2e \tan(i) \sin(i) = \frac{2e}{\cos(i)} - \frac{2e \sin^2(i)}{\cos(i)} = 2e \frac{\cos^2(i)}{\cos(i)}$$

Soit :

$$\delta = 2e \cos(i)$$

On se place dans les conditions de Gauss. En faisant un développement limité à l'ordre 2, on obtient :

$$\delta = 2e \cos(i) = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

L'ordre d'interférences vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

Au centre de l'écran ($i = 0$), l'ordre vaut :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} = 4028,57$$

C'est la valeur maximale de p . Le rayon r_1 du premier anneau est obtenu pour $p_1 = 4028$.

Dans les conditions de Gauss, on a : $\tan i \approx i = \frac{r_1}{f'}$.

Soit :

$$p_1 = p_0 \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) = p_0 \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2} \right)$$

On a alors :

$$1 - \frac{p_1}{p_0} = \frac{r_1^2}{2f'^2}$$

D'où :

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_1}{p_0} \right)} = 16,8 \text{ mm}$$

Le deuxième anneau est obtenu pour $p_2 = 4027$. On obtient alors :

$$r_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right)} = 27,9 \text{ mm}$$

La différence de marche en M ne dépend que de la distance $F'M$, ce qui montre que les franges d'interférences sont des anneaux centrés sur F' .

5. Sur le chemin du rayon (1), on remplace une épaisseur e' de l'air par une lame d'indice n . La nouvelle différence de marche δ' peut s'exprimer en fonction de l'ancienne différence de marche δ sans la lame :

$$\delta' - \delta = -2(ne' - 2e') = -2(n-1)e'$$

Attention au facteur 2, car le rayon (1) passe deux fois dans la lame. On doit mettre un signe (-) devant $(2ne' - 2e')$ car la différence de marche est calculée entre le rayon (2) et le rayon (1). Cette expression est valable pour des angles i faibles.

Le nouvel ordre d'interférences vaut :

$$p' = \frac{\delta'}{\lambda_0} = p - \frac{2(n-1)e'}{\lambda_0}$$

La variation de l'ordre d'interférences au centre vaut :

$$\Delta p = -\frac{2(n-1)e'}{\lambda_0} = -17,8$$

Le nouvel ordre d'interférences au centre vaut :

$$p'_0 = 4010,76$$

Le rayon du premier anneau avec $p'_1 = 4010$ est donné par :

$$r'_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_1}{p'_0} \right)} = 19,5 \text{ mm}$$

Le rayon du deuxième anneau avec $p'_2 = 4009$ est donné par :

$$r'_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_2}{p'_0} \right)} = 29,7 \text{ mm}$$

Exercice 2: Anneaux de Newton (★★)

1. On a $x = HM$, $\epsilon = R - CH$ et $CH^2 + HM^2 = R^2$, d'où

$$\epsilon = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right]$$

$$\epsilon \simeq R \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} \right) \right] = \frac{x^2}{2R}$$

2. La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en M est

$$\delta = 2\epsilon + \frac{\lambda_0}{2}$$

Par application de la formule de Fresnel, on a interférence constructive ou destructive selon que l'ordre d'interférence

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{x^2}{\lambda_0 R} + \frac{1}{2}$$

est un entier ou un demi-entier. Les franges brillantes sont donc des cercles de rayon

$$x_k = \sqrt{\lambda_0 R \left(k + \frac{1}{2} \right)}$$

où k est un entier et les franges sombres de rayon

$$x'_k = \sqrt{k \lambda_0 R}$$

Au centre, $x = 0$, donc on a une tache sombre qu'on nomme première frange sombre avec $k = 0$. La n -ième frange sombre est donc de rayon

$$r'_n = x'_{n-1} = \sqrt{(n-1) \lambda_0 R}$$

et la n -ième frange brillante est de rayon

$$r_n = x_{n-1} = \sqrt{\lambda_0 R \left((n-1) + \frac{1}{2} \right)}$$

3. Le centre est une tache sombre quelle que soit la valeur de λ . La plus petite des franges brillantes est celle correspondant à λ_0 le plus petit : elle est donc violette, puis toutes les couleurs s'allument, on a donc des cercles concentriques irisés.

Exercice 3: Doublet jaune du mercure (★★)

1. L'intensité due à la longueur d'onde λ_{01} :

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{I}_0}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda_{01}} \right) \right)$$

L'intensité due à la longueur d'onde λ_{02} :

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{I}_0}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda_{02}} \right) \right)$$

Donc l'intensité totale est la somme des intensités car les sources sont non synchrones ($\lambda_{01} \neq \lambda_{02}$) :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{2e\Delta\lambda}{2\lambda_m^2} \right) \cos \left(2\pi \frac{2e}{\lambda_m} \right) \right)$$

or $e = Vt$, donc

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi t}{\Delta t} \right) \cos \left(\frac{2\pi t}{T_0} \right) \right)$$

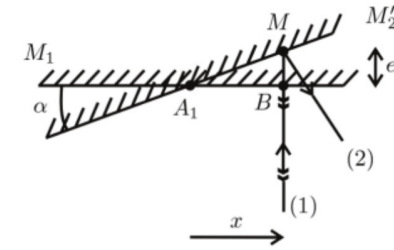
avec $\Delta t = \frac{\lambda_m^2}{2V\Delta\lambda}$ et $T_0 = \frac{\lambda_m}{2V}$.

On constate que $\Delta t \gg T_0$ car $\lambda_m \gg \Delta\lambda$.

2. $T_0 = 0,52\text{ s}$, $\lambda_m = 2VT_0 = 582\text{ nm}$, $\Delta t = 140\text{ s}$ et $\Delta\lambda = 2,2\text{ nm}$.
3. $\mathcal{I}_{\min} \approx 0$ donc on a bien $\mathcal{I}_1 \approx \mathcal{I}_2$.

Exercice 4: Profil de raie rectangulaire (★★★)

1. On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

On pose $x = \overline{A_1B} \approx \overline{A_1M}$ comme α est petit.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 \approx 2n_{\text{air}}e = 2e = 2\alpha x$$

On observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

2. Les ondes émises par les différentes fréquences sont incohérentes. Il faut donc faire la somme des éclaircements.

L'éclaircissement dû à la bande de fréquence $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ vaut $A d\nu$ lorsque l'une des voies de l'interféromètre est occultée.

L'éclaircissement dû à la bande de fréquence $d\nu$ en sortie de l'interféromètre est :

$$d\varepsilon = 2A d\nu \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right)$$

On a donc :

$$\varepsilon = 2A \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right) d\nu = 2A \left[\nu + \frac{\sin \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right)}{2\pi\delta/c} \right]_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}}$$

D'où :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu + \frac{2A}{2\pi\delta/c} \left(\sin \left(\frac{2\pi\delta}{c} \left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi\delta}{c} \left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2} \right) \right) \right)$$

On obtient :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu + \frac{2A}{2\pi\delta/c} \left(2 \sin \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0 \right) \right)$$

D'où finalement :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0 \right) \right)$$

Si on représente l'éclairement en fonction de δ , on a un terme lent : $\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right)$ et un terme rapide : $\cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0 \right)$.

Lorsque δ varie de quelques λ_m , l'éclairement varie entre $\varepsilon_{\min}$ et $\varepsilon_{\max}$, c'est-à-dire que le terme rapide vaut -1 ou 1.

On a donc : $\varepsilon_{\max} = 2A\Delta\nu (1 + |\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right)|)$ et $\varepsilon_{\min} = 2A\Delta\nu (1 - |\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right)|)$.

Le contraste local est :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}} = \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \right|$$

C s'annule pour la première fois lorsque $\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu = \pi$, d'où :

$$\delta = 2d = \frac{c}{\Delta\nu}$$

Si $\delta > 2d$, le contraste est très proche de 0. Expérimentalement, les franges ne réapparaissent plus.

Application numérique :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d} = 1,0 \text{ GHz}$$

3. La longueur de cohérence est : $L_c = \frac{c}{\Delta\nu} = 2d = 30 \text{ cm}$.

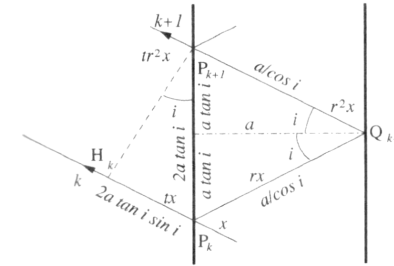
La durée du train d'onde est : $\tau = \frac{L_c}{c} = 1,0 \text{ ns}$.

La longueur de cohérence L_c est la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée moyenne τ d'un train d'onde. La valeur de L_c est assez grande pour cette expérience. L_c peut être beaucoup plus grande pour un laser stabilisé (400 m) alors qu'elle est très faible pour la lumière blanche (0,9 μm).

****Application pratique**** : On n'a plus d'interférences lorsque la différence de marche est supérieure à la longueur de cohérence L_c . Les ondes ne proviennent plus du même train d'onde.

Exercice 5: Interféromètre de Fabry-Perot (★★★)

1. Détaillons la construction des surfaces d'onde en partant d'un point P_k sur le miroir M_1 .



En partant de M et en suivant le sens inverse de la lumière, le plan d'onde passant par P_{k+1} coupe le rayon k en H_k . Les différents triangles rectangles de la figure permettent d'identifier les différentes longueurs indiquées sur la figure. On en déduit

$$\delta = [P_k Q_{k+1} P_{k+1} M] - [P_k H_k M]$$

$$\delta = [P_k Q_{k+1}] + [Q_{k+1} P_{k+1}] - [P_k H_k]$$

soit

$$\delta = \frac{2a}{\cos i} - 2a \tan i \sin i$$

$$\delta = \frac{2a}{\cos i} - \frac{2a \sin^2 i}{\cos i} = 2a \cos i$$

2. Le rayon incident en P_k (noté x sur le schéma) subit
- une transmission quand il sort selon le rayon k (noté tx).
 - une réflexion partielle sur M_1 (rx), puis une réflexion partielle sur M_2 (r^2x) et une transmission à travers M_1 (tr^2x) quand il sort selon le rayon $k+1$.

Le rapport des amplitudes réelles est donc r^2 . Par application de la formule clé et en tenant compte de ce coefficient, on en déduit le rapport des amplitudes complexes

$$\underline{a}_{k+1} = r^2 \underline{a}_k e^{-i \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} \quad \text{donc}$$

$$\frac{\underline{a}_{k+1}}{\underline{a}_k} = r^2 e^{-i \frac{4\pi a \cos i}{\lambda_0}} = r^2 e^{-i\varphi}$$

3. L'onde résultante en M est la somme des amplitudes qui forment une suite géométrique de raison $r^2 e^{-i\varphi}$:

$$\underline{a} = \underline{a}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{-i\varphi})^n$$

Le module de la raison est strictement inférieur à 1, donc cette série géométrique converge et sa somme est

$$\underline{a} = \frac{a_0}{1 - r^2 e^{-i\varphi}}$$

On en déduit l'intensité lumineuse

$$I = K \underline{a} \underline{a}^* = K a_0 a_0^* \frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi}} \times \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}}$$

$$I = \frac{I_0}{1 - 2r^2 \cos \varphi + r^4}$$

En utilisant la relation de trigonométrie

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

on en déduit

$$I = \frac{I_0}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$I = \frac{\frac{I_0}{(1-r^2)^2}}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$$

Par identification avec la formule donnée par l'énoncé

$$J_0 = \frac{I_0}{(1 - r^2)^2} \quad \text{et} \quad m = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} = 90$$

Exercice 6: Interféromètre de Mach-Zender (***)

1. $(S\Omega)_1 = (S\Omega)_2$ donc interférence constructive en Ω sur l'écran.

2. (a) $\delta_1 = (n - n_0)e$

(b) $(A'B') = \frac{ne}{\cos(r)}$ avec $n_0 \sin(\theta) = n \sin(r)$.

Pour de petits angles : $(A'B') = ne \left(1 + \frac{1}{2} r^2 \right) = ne \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_0 \theta}{n} \right)^2 \right)$.

$A'H' = A'B' \cos(\theta - r)$

Donc $\delta_2 = (A'B') - n_0 A'H' = e \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_0 \theta}{n} \right)^2 \right) \times \left(n - n_0 \left(1 - \frac{(\theta - r)^2}{2} \right) \right)$

$$\Leftrightarrow \delta_2 = e \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_0 \theta}{n} \right)^2 \right) \times \left(n - n_0 + \frac{n_0 (\theta - r)^2}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \delta_2 = e(n - n_0) + \frac{e}{2} (n_0 \theta)^2 \frac{n - n_0}{n^2} + \frac{e n_0}{2} (\theta - r)^2$$

$$\Leftrightarrow \delta_2 = e(n - n_0) + \frac{e}{2} \left[\theta^2 + \left(\frac{n_0}{n} \right)^2 - 2 \frac{n_0}{n} \theta^2 + \frac{n_0}{n} \theta^2 - \left(\frac{n_0}{n} \right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \delta_2 = e(n - n_0) + \frac{e}{2} n_0 \theta^2 \left(1 - \frac{n_0}{n} \right)$$

(c)

$$\Delta \phi_{21} = k_0(\delta_2 - \delta_1) = k_0 \frac{e}{2} n_0 \theta^2 \left(1 - \frac{n_0}{n} \right) = \frac{\pi e}{\lambda} \theta^2 \left(1 - \frac{n_0}{n} \right)$$

3. (a) L'éclairement est maximal pour $\Delta \phi = 2m\pi, m \in \mathbb{N}$ soit

$$\theta_m = \sqrt{\frac{2m\lambda}{e \left(1 - \frac{n_0}{n} \right)}}$$

AN : $m = 1, \theta_1 = 6,2 \times 10^{-2} \text{ rad} = 3,5^\circ$.

(b) Si on veut diminuer θ_1 , il faut augmenter e .

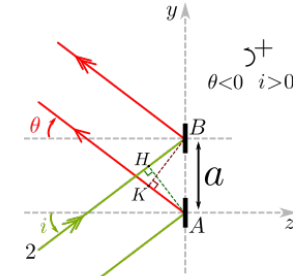
(c) On doit avoir $\delta_2 - \delta_1 < \ell_c \Leftrightarrow \frac{e}{2} n_0 \theta^2 \left(1 - \frac{n_0}{n} \right) < \ell_c$ soit

$$e < \frac{2\ell_c}{n_0 \theta_{max}^2 \left(1 - \frac{n_0}{n} \right)}$$

AN : $e < 20 \text{ cm}$

2 Réseaux

Exercice 7: Capacité de stockage d'un CD (**)



1. (a) 1

La différence de marche $\delta = (S_\infty BA') - (S_\infty BA') = n_0 HB - n_0 AK$ soit

$$\delta = n_0 a (\sin(i) + \sin(\theta))$$

car $i > 0$ et $\theta < 0$.

Remarque : les deux rayons se réfléchissent sur une surface métallique donc une différence de marche supplémentaire de $\lambda_0/2$ apparaît à la réflexion pour chaque rayon mais disparaît par soustraction dans δ .

- (b) On aura interférence constructive si $\delta = p\lambda_0$ avec $p \in \mathbb{Z}$. On aura donc des angles θ_p tels que

$$\sin(\theta_p) = \frac{p\lambda}{a} - \sin(i)$$

2. (a) On aura $i = \alpha$ et $\theta_1 = \alpha$ soit $2a \sin(\theta_1) = 2a \sin(\alpha) = \lambda$ donc

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{2a}$$

- (b) $a = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha)}$. AN : $a = \frac{650 \times 10^{-9}}{2 \times \sin(12+40/60)} = 1,48 \times 10^{-6} \text{ m}$ Cette longueur est à la limite de résolution d'un microscope optique donc observation difficile.

- (c) On peut estimer la longueur de la piste L en faisant le rapport de la surface utile du disque sur la largeur d'une piste :

$$L = \frac{S}{a} = \frac{\pi (R_{max}^2 - R_{min}^2)}{a}$$

$$\text{AN : } L = 6,4 \text{ km}$$

- (d) On peut en déduire le nombre N de bits avec

$$N = \frac{L}{\ell}$$

$$\text{AN : } N = 6,4 \times 10^9 \text{ bits soit } N/8 = 8,1 \times 10^8 \text{ octets.}$$

La capacité de stockage des CDs est donc d'environ 800 Mo.

Exercice 8: Limite de résolution d'un réseau (**)

1. On peut redémontrer la formule des réseaux en transmission appliquée sous incidence normale :

$$\sin(\theta_p) = p \frac{\lambda}{a}$$

avec $a = 1/n$ le pas du réseau et p l'ordre d'interférence.

2. Soit N le nombre de traits éclairés du réseau, donc $N = nL = 6000$.

Pour une longueur d'onde donnée, on peut montrer (cf cours) que la demi-largeur d'un pic d'intensité est

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{N} \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta)$$

On en déduit

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} a \Delta_1(\sin(\theta)) \quad \text{soit} \quad \Delta_1(\sin(\theta)) = \frac{\lambda}{L}$$

3. Pour l'ordre 1, on a

$$\sin(\theta_1) = \frac{\lambda}{a} \quad \text{donc} \quad \Delta_2(\sin \theta) = \frac{\Delta\lambda}{a}$$

4. On a

$$\frac{\Delta\lambda}{a} = \frac{\lambda}{L} \quad \text{donc} \quad R = \frac{L}{a} = nL = N = 6000$$

5. Le plus petit écart de longueur d'onde que le réseau peut distinguer est

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda_{\text{moy}}}{R} = 0,1 \text{ nm}$$

Comme $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} > (\Delta\lambda)_{\min}$, on en conclut qu'on distinguera les deux raies jaunes du sodium dans l'ordre 1.