

Feuille d'exercices n°24

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre en $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 + M = A$.

Corrigé : On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-5 & -3 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} = X^2 - 8X + 12 = (X-2)(X-6)$

Par condition suffisante, la matrice A est diagonalisable. On a

$$(x, y) \in E_2(A) \iff (A - 2I_2)X = 0 \iff x + y = 0 \iff (x, y) = x(1, -1)$$

et $(x, y) \in E_6(A) \iff (A - 6I_2)X = 0 \iff (x, y) = y(3, 1)$

Ainsi $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, notant $M = PXP^{-1}$ avec $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$M^2 + M = A \iff PD^2P^{-1} + PDP^{-1} = PDP^{-1} \iff X^2 + X = D$$

On remarque $XD = X^3 + X^2 = DX$

Posant $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve

$$XD - DX = \begin{pmatrix} 0 & 4b \\ -4c & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff (b, c) = 0$$

Ainsi $X^2 + X = D \iff \begin{cases} a^2 + a = 2 \\ d^2 + d = 6 \end{cases} \iff (a, d) \in \{(1, 2), (-2, 2), (1, -3), (-2, -3)\}$

Enfin après calcul des matrices $M = PDP^{-1}$, on conclut

Les solutions sont $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}.$

Remarque : On a vu que X et D commutent et par conséquent, la matrice X est diagonale. C'est un fait plus général : pour f et g dans $\mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, si f et g commutent et f diagonalisable à valeurs propres simples, alors $g \in \mathbb{K}[f]$ et donc g est en particulier diagonalisable pour le même changement de base que f . Le lecteur curieux pourra se référer à l'exercice 5 de la feuille 23.

Exercice 2 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que A diagonalisable $\iff B$ diagonalisable

Corrigé : On a $B^2 = 2 \left(\begin{array}{c|c} A^2 & A^2 \\ \hline A^2 & A^2 \end{array} \right) \quad B^3 = 2^2 \left(\begin{array}{c|c} A^3 & A^3 \\ \hline A^3 & A^3 \end{array} \right)$

et par une récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad B^k = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} (2A)^k & (2A)^k \\ \hline (2A)^k & (2A)^k \end{array} \right)$$

Il s'ensuit par combinaison linéaire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \text{avec} \quad P(0) = 0 \quad P(B) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} P(2A) & P(2A) \\ \hline P(2A) & P(2A) \end{array} \right) \quad (*)$$

Si B est diagonalisable, il existe P annulateur de B scindé à racines simples et on a $\text{Sp}(B) \subset Z(P)$ où $Z(P)$ désigne l'ensemble des racines de P . Comme $\text{rg}(B) < 2n$ puisque par exemple $L_1 = L_{n+1}$, on a $0 \in \text{Sp}(B)$ d'où $P(0) = 0$. Ainsi, le polynôme P vérifie la condition évoquée par $(*)$ et $P(2X)$ est donc un polynôme annulateur scindé à racines simples de A d'où

$$B \text{ diagonalisable} \implies A \text{ diagonalisable}$$

Réciproquement, si A est diagonalisable, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de A scindé à racines simples. Quitte à considérer XQ , on a $0 \in Z(Q)$. Ainsi, en posant $P(X) = Q(X/2)$, il vient d'après la relation $(*)$ que $P(B) = 0$ avec P scindé à racines simples, autrement dit

$$A \text{ diagonalisable} \implies B \text{ diagonalisable}$$

On conclut

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff B \text{ diagonalisable}}$$

Variantes : 1. On peut faire sans polynôme annulateur mais c'est plus délicat. Si A est diagonalisable, on dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ diagonale. Posant $Q = \text{diag}(P, P)$, on trouve

$$Q^{-1}BB = \left(\begin{array}{c|c} D & D \\ \hline D & D \end{array} \right)$$

Puis, posant $R = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline I_n & -I_n \end{array} \right)$, on trouve R inversible d'inverse $R^{-1} = \frac{1}{2}R$ et $(QR)^{-1}BQR = \text{diag}(2D, 0)$. Réciproquement supposons B diagonalisable. On a

$$\mathbb{K}^{2n} = E_0(B) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}} E_\lambda(B)$$

Pour $\lambda \neq 0$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} BX = \lambda X &\iff \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \\ &\iff A(X_1 + X_2) = \lambda X_1 = \lambda X_2 \iff \begin{cases} X_1 = X_2 \\ AX_1 = \frac{\lambda}{2}X_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, avec l'application injective $X \mapsto X_1$, on envoie une famille libre de vecteurs propres de B associés à des valeurs propres non nulles sur des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles. On en déduit

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}} E_\lambda(B) \leq \dim \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} E_\lambda(A)$$

Avec les opérations $L_{i+n} \leftarrow L_{i+n} - L_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ puis $C_{j+n} \leftarrow C_{j+n} - C_j$ pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il vient

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \text{rg}(A)$$

D'après le théorème du rang, il s'ensuit

$$\dim E_0(B) = 2n - \text{rg}(B) = 2n - \text{rg}(A) = n + \dim E_0(A)$$

Ainsi

$$2n \leq n + \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$$

On en déduit

$$n \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \leq \dim \mathbb{K}^n = n$$

et on conclut que la matrice A est diagonalisable.

2. Pour le sens direct, on peut aussi partir de l'égalité

$$\mathbb{K}^n = E_0(A) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} E_\lambda(A)$$

L'application injective $X \mapsto \left(\frac{X}{X} \right)$ envoie une famille libre de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles sur des vecteurs propres de B associés à des valeurs propres non nulles. L'application injective $X \mapsto \left(\frac{X}{0} \right)$ envoie une famille libre de vecteurs propres de A associés à zéro sur une famille libre de vecteurs propres de B associés à zéro. On peut compléter cette famille par $(E_j - E_{j+n})_{1 \leq j \leq n}$ famille de vecteurs propres de B associés à zéro. La famille obtenue est libre et on en déduit

$$\dim E_0(B) + \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}} \dim E_\lambda(B) \geq n + \dim E_0(A) + \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} \dim E_\lambda(A) = n + \dim \mathbb{K}^n$$

Le résultat suit.

Exercice 3 (***)

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe n entier non nul vérifiant $M^n = I_2$. Établir $M^{12} = I_2$.

Corrigé : Le polynôme $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ est annulateur de M et scindé à racines simples. Il s'ensuit que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{U}_n$. Les racines de χ_M sont donc racines n -ièmes de l'unité et on a $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$ donc les racines sont toutes deux réelles ou complexes conjuguées. Si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$, la matrice M peut être semblable (et donc égale) à I_2 ou $-I_2$ ou aussi semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (la position du signe n'importe pas, il suffit d'échanger les colonnes dans la matrice de passage) d'où M^2 semblable (et donc égale) à I_2 et le résultat suit pour tous ces cas. Si le spectre de M n'est pas réel, la matrice M est semblable à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Par ailleurs, on a

$$\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det M \quad \text{avec} \quad \text{Tr}(M) \in \mathbb{Z}$$

La trace étant un invariant de similitude, on obtient $\text{Tr}(M) = 2 \cos \theta \in \llbracket -1; 1 \rrbracket$. Le cas $\cos \theta = 0$ correspond à $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ d'où M semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et par conséquent M^4 semblable (et donc égale) à I_2 . Le cas $\cos \theta = 1$ correspond à $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{3} [\pi]$ d'où M semblable à $\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}$ d'où M^3 semblable (et donc égale) à I_2 . Le cas $\cos \theta = -1$ se traite de manière analogue. Ainsi, il existe toujours un diviseur d de 12 tel que $M^d = I_2$ et on conclut

$$\boxed{M^{12} = I_2}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit le *commutant* de f par

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. On suppose f nilpotente d'indice n . Déterminer $\mathcal{C}(f)$.
3. On suppose seulement f trigonalisable. Montrer $\dim \mathcal{C}(f) \geq n$.

Corrigé : 1. L'ensemble $\mathcal{C}(f)$ contient $0_{\mathcal{L}(E)}$ et est stable par combinaison linéaire par linéarité de la composition d'où

$$\boxed{\text{Le commutant } \mathcal{C}(f) \text{ est un sev de } \mathcal{L}(E).}$$

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrons que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Soit $(\alpha_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0_E$. En appliquant f^{n-1} dans cette égalité, il vient

$$f^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) \right) = \alpha_0 f^{n-1}(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f^{k-1}(f^n(x_0)) = \alpha_0 \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq 0_E} = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

En répétant le procédé, on montre la nullité de tous les α_k d'où la liberté de $\mathcal{B}$ et comme $\text{Card } \mathcal{B} = \dim E$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E . Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. On dispose de $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$. Posons $h = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. Comme g commute avec f , alors g commute avec f^i pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} g(f^i(x_0)) &= g \circ f^i(x_0) = f^i \circ g(x_0) = f^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) (f^i(x_0)) = h(f^i(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes g et h coïncident sur $\mathcal{B}$ et par caractérisation d'une application linéaire sur une base, il s'ensuit que $g \in \mathbb{K}[f]$ d'où $\mathcal{C}(f) \subset \mathbb{K}[f]$. L'inclusion réciproque est immédiate d'où

$$\boxed{\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de trigonalisation de f et $T = \text{mat}_{\mathcal{B}} f \in T_n(\mathbb{K})$ (espace des matrices triangulaires supérieures). Notant

$$\mathcal{C}(T) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MT = TM\}$$

on a clairement $\dim \mathcal{C}(T) = \dim \mathcal{C}(f)$. Considérons la dimension de l'espace de solutions de l'équation

$$MT - TM = 0 \quad (S)$$

d'inconnue $M \in T_n(\mathbb{K})$. Les termes diagonaux donnent les équations triviales

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad m_{i,i}t_{i,i} - t_{i,i}m_{i,i} = 0$$

Par conséquent, le système (S) possède $\frac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Comme le rang de (S) est majorée par le nombre d'équations, il s'ensuit

$$\dim \mathcal{C}(T) \cap T_n(\mathbb{K}) \geq \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) \geq n$$

Ainsi

$$\boxed{\dim \mathcal{C}(T) \geq \dim \mathcal{C}(T) \cap T_n(\mathbb{K}) \geq n}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Décrire les sev stables par u .

Corrigé : Soit F un sev stable par u . L'endomorphisme induit u_F est diagonalisable donc admet une base de vecteurs propres qui sont aussi vecteurs propres de u et des valeurs propres qui sont parmi celles de u . Ainsi, on a

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_F)} E_\lambda(u_F) \quad \text{et} \quad \text{Sp}(u_F) \subset \text{Sp}(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(u_F) \quad E_\lambda(u_F) \text{ sev de } E_\lambda(u)$$

Notant $F_\lambda = E_\lambda(u_F)$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u_F)$ et $F_\lambda = \{0\}$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u) \setminus \text{Sp}(u_F)$, on peut donc écrire

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda \quad \text{avec} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad F_\lambda \text{ sev de } E_\lambda(u)$$

Réciproquement, un sev de la forme $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda$ avec F_λ sev de $E_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$

est stable par u . En effet, pour $x \in F$, il existe $(x_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ tel que $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} x_\lambda$. Puis

$$u(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} u(x_\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda x_\lambda \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Les sev stables par } u \text{ sont exactement les } \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda \text{ avec les } F_\lambda \text{ des sev respectifs des } E_\lambda(u).}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

1. Si $\text{Card Sp}(u) = n$, déterminer le nombre de sev stables par u .
2. Que peut-on dire si $\text{Card Sp}(u) < n$?

Corrigé : 1. Comme u admet n valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit F sev stable par u . L'endomorphisme induit u_F est diagonalisable donc admet une base de vecteurs propres qui sont aussi vecteurs propres de u et des valeurs propres qui sont parmi celles de u . Ainsi, on a

$$F = \bigoplus_{\lambda \in I} E_{\lambda}(u_F) \quad \text{avec} \quad I \subset \text{Sp}(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in I \quad E_{\lambda}(u_F) \subset E_{\lambda}(u)$$

Or, on a $\dim E_{\lambda}(u_F) \geq 1$ et $\dim E_{\lambda}(u) = 1$ pour $\lambda \in I$, on en déduit que

$$F = \bigoplus_{\lambda \in I} E_{\lambda}(u) \quad \text{avec} \quad I \subset \text{Sp}(u)$$

Réciproquement, pour $I \subset \text{Sp}(u)$, on vérifie sans difficulté que $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$ est un sev stable par u . Ainsi, les sev stables par u sont exactement les $\bigoplus_{\lambda \in I} E_{\lambda}(u)$ avec $I \subset \text{Sp}(u)$. Ainsi, le nombre de sev stables par u est le nombre de parties de $\text{Sp}(u)$. Comme $\text{Card Sp}(u) = n$, on a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ parties de $\text{Sp}(u)$ et on conclut

$$\boxed{\text{Si Card Sp}(u) = n, \text{ il y a } 2^n \text{ sev stables par } u.}$$

2. Si $\text{Card Sp}(u) < n$, alors il existe λ valeur propre de multiplicité $m_{\lambda}(u) > 1$. On a $\dim E_{\lambda}(u) = m_{\lambda}(u)$ car u est diagonalisable et par conséquent, l'espace propre $E_{\lambda}(u)$ contient un plan vectoriel qu'on peut noter $\text{Vect}(x, y)$ avec (x, y) famille libre dans $E_{\lambda}(u)$. Notons $D_n = \text{Vect}(x + ny)$ avec n entier. Pour n, m entiers distincts, on a $(x + ny, x + my)$ libre. En effet, soit α, β des scalaires. Il vient

$$\alpha(x + ny) + \beta(x + my) = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ n\alpha + m\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

Ainsi, les sev $(D_n)_n$ sont deux à deux distincts et ils sont clairement par stables par u . On conclut

$$\boxed{\text{Si Card Sp}(u) < n, \text{ il y a une infinité de sev stables par } u.}$$

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

Corrigé : Soit $E = \mathbb{C}^n$ et u, v dans $\mathcal{L}(E)$ respectivement canoniquement associés à A et B . On a $u \circ v = 0$ d'où $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue par complétion d'une base de $\text{Ker } u$. On a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_1 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \text{mat}_{\mathcal{B}} v = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

avec $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ où $r = \dim \text{Ker } u$. Il existe $P_2 \in \text{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$ et $P_1 \in \text{GL}_r(\mathbb{C})$ telle que $P_2^{-1}A_2P_2$ et $P_1^{-1}B_1P_1$ soient triangulaires supérieures. Alors, considérant la matrice par blocs $P = \text{diag}(P_1, P_2)$, on a P inversible d'inverse $P^{-1} = \text{diag}(P_1^{-1}, P_2^{-1})$ et un produit par blocs donne

$$P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_1 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & P_1^{-1}A_1P_2 \\ \hline 0 & P_2^{-1}A_2P_2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1}B_1P_1 & P_1^{-1}B_2P_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

qui sont toutes deux triangulaires supérieures. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}BP \text{ soient triangulaires supérieures.}}$$

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

Le résultat subsiste-t-il pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$?

Corrigé : Le sens direct est immédiat en considérant une base de vecteurs propres. Réciproquement, on a

$$E = \text{Ker } f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f^2) \setminus \{0\}} \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}) \right)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\pm\mu(\lambda)$ les racines carrées complexes. Ainsi, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \quad X^2 - \lambda = (X - \mu(\lambda))(X + \mu(\lambda)) \quad \text{avec} \quad (X - \mu(\lambda)) \wedge (X + \mu(\lambda)) = 1$$

D'après le lemme des noyaux, il vient

$$E = \text{Ker } f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f^2) \setminus \{0\}} \text{Ker}(f - \mu(\lambda) \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + \mu(\lambda) \text{id}) \right)$$

Comme $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ (éventuellement réduit à $\{0_E\}$), on a montré que E est somme directe des sous-espaces propres de f d'où f diagonalisable. Ainsi

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, le résultat est faux en considérant f canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $f^2 = \text{id}$ et f n'est pas diagonalisable.

Exercice 9 (****)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u est non diagonalisable si et seulement s'il existe un plan vectoriel F stable par u et $\mathcal{B}$ une base de F tels que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u_F = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Corrigé : Supposons u non diagonalisable. On a π_u scindé mais pas à racines simples d'où l'existence de $\lambda \in \text{Sp}(u)$ de multiplicité $\alpha \geq 2$ dans π_u . On note $\pi_u = (X - \lambda)^\alpha Q$, $H = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^\alpha$ et $v = u_H$. On a $\text{Ker}(v - \lambda \text{id})^{\alpha-1} \subset \text{Ker}(v - \lambda \text{id})^\alpha = H$ et cette inclusion est stricte sans quoi on aurait $H = \text{Ker}(v - \lambda \text{id})^{\alpha-1}$ d'où $(X - \lambda)^{\alpha-1}$ annulateur de v puis $(X - \lambda)^{\alpha-1}Q$ annulateur de u (puisque $E = H \oplus \text{Ker } Q(u)$ d'après le lemme des noyaux) ce qui contredit la minimalité de π_u . On prend $a \in H \setminus \text{Ker}(v - \lambda \text{id})^{\alpha-1}$, $y = (v - \lambda \text{id})^{\alpha-2}(a)$ et $x = (v - \lambda \text{id})^{\alpha-1}(a)$. Par choix de a , on a y et x non nuls puis $v(x) = \lambda x$ et $v(y) = x + \lambda y$. Soit $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\gamma x + \delta y = 0$. Il vient

$$(v - \lambda \text{id})(\gamma x + \delta y) = \delta x = 0$$

On en déduit $\delta = 0$ puis $\gamma = 0$. Ainsi, le sev $F = \text{Vect}(x, y)$ est un plan stable par v donc par u et notant $\mathcal{B} = (x, y)$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} u_F = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Réciproquement, si u était diagonalisable, alors pour F stable, on aurait u_F diagonalisable puis $\text{mat}_{\mathcal{B}} u_F$ semblable à λI_2 donc égale à cette matrice ce qui est faux. On conclut

$$u \text{ non diagonalisable} \iff \text{il existe } F \text{ plan stable et } \mathcal{B} \text{ base de } F \text{ tels que } \text{mat}_{\mathcal{B}} u_F = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (****)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\chi_A = \chi_B \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$$

Corrigé : Le sens direct est immédiat : si $\chi_A = \chi_B$, alors les matrices A et B ont même valeurs propres et mêmes multiplicités et le résultat suit par trigonalisation de A et de B . Supposons

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$$

Par linéarité de la trace, on a $\text{Tr}(P(A)) = \text{Tr}(P(B))$ pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Supposons $\text{Sp}(A) \neq \text{Sp}(B)$ avec par exemple $\mu \in \text{Sp}(B) \setminus \text{Sp}(A)$. Soit $(L_\lambda)_\lambda$ la famille de polynômes interpolateurs associés à $\text{Sp}(A) \cup \{\mu\}$. L'ensemble $\text{Sp}(A) \cup \{\mu\}$ est de cardinal au plus $n + 1$. Les polynômes L_λ sont donc de degré au plus n . Par trigonalisation pour A et B , on trouve

$$\text{Tr}(L_\mu(A)) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(L_\mu(B)) = m_\mu(B) \quad \text{avec} \quad m_\mu(B) \geq 1$$

ce qui est absurde. On en déduit $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$. Considérant la famille $(L_\lambda)_\lambda$ (abus de notation ...) associée à $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$, on trouve

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad m_\lambda(A) = \text{Tr}(L_\lambda(A)) = \text{Tr}(L_\lambda(B)) = m_\lambda(B)$$

Ainsi, les polynômes χ_A et χ_B de $\mathbb{C}[X]$ ont même racines avec mêmes multiplicités et sont unitaires. On conclut

$$\chi_A = \chi_B \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$$