

Feuille d'exercices n°22

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (*)

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, préciser la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (*)

Montrer que la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1 est diagonalisable et préciser une matrice de passage associée.

Exercice 4 (**)

Soit $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice 5 (**)

Diagonaliser la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On note $(p_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ la famille de projecteurs associés à la somme directe $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Montrer

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$$

Exercice 7 (**)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M^\top = I_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 8 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geq 2$. Résoudre $AX = \lambda X$ avec $X^\top = (x_0 \dots x_{p-1})$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A .

Exercice 9 (*)

Les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (**)

Soit n entier non nul, $a_0, \dots, a_{n-1}$ des complexes et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer J^k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
2. Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser son spectre.
3. En déduire $\det A$.

Exercice 11 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists x \in E \mid (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ base de E ;
2. les valeurs propres de f sont simples ;
3. $(\text{id}, f, \dots, f^{n-1})$ base de $\mathbb{K}[f]$.

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v .

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u^5 = v^5$. Montrer que $u = v$.