

Feuille d'exercices n°23

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 2 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in E$ et on pose $\varphi(M) = AM$ pour tout $M \in E$.

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer A diagonalisable $\iff \varphi$ diagonalisable
3. Si A diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de φ .

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $(u_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{L}(E)$, endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, u, v dans $\mathcal{L}(E)$ avec $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent. Montrer que $\det(u + v) = \det u$.

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On définit le *commutant* de f par

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer : $g \in \mathcal{C}(f) \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f) \quad E_\lambda(f) \text{ stable par } g$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(f)$.
4. Si les valeurs propres de f sont simples, montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 6 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis établir $\det(A) > 0$.

Exercice 7 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A, B) \in E^2$ et on pose $\varphi(M) = AM + MB$ pour tout $M \in E$. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis montrer que si A et B sont diagonalisables, alors φ l'est.

Exercice 8 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$A \text{ nilpotente} \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = 0$$

Exercice 9 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline A & A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 10 (***)

Pour $n \geq 2$, montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 11 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline A & 0 \end{array} \right)$.

1. Relier les sous-espaces propres de A et B .
2. Préciser les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 12 (****)

On pose
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P_n = \chi_{A_n}$$

1. En considérant $P_n(2 \cos(\theta))$ avec $\theta \in]0; \pi[$, déterminer une expression factorisée de P_n .
2. En déduire que la matrice A_n est diagonalisable et préciser ses éléments propres