

Feuille d'exercices n°24

Exercice 1 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre en $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 + M = A$.

Indications : Déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale puis résoudre l'équation en $X = P^{-1}MP$. On pourra remarquer $XD = DX$.

Exercice 2 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que A diagonalisable $\iff B$ diagonalisable

Indications : Déterminer une forme par blocs simple de B^n pour n entier non nul et en déduire $P(B)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Utiliser ensuite la caractérisation d'une matrice diagonalisable à l'aide d'un polynôme annulateur.

Exercice 3 (***)

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe n entier non nul vérifiant $M^n = I_2$. Établir $M^{12} = I_2$.

Indications : Observer que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ puis distinguer le cas $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$ ou pas. On pourra alors considérer la trace de M .

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit le *commutant* de f par

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. On suppose f nilpotente d'indice n . Déterminer $\mathcal{C}(f)$.
3. On suppose seulement f trigonalisable. Montrer $\dim \mathcal{C}(f) \geq n$.

Indications : 2. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E puis comparer $\mathcal{C}(f)$ à $\mathbb{K}[f]$.

3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire, considérer le système $AM - MA = 0$ et compter le nombre d'équations et d'inconnues. On pourra détailler les équations concernant les coefficients diagonaux du système.

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Décrire les sev stables par u .

Indications : En considérant u_F avec F stable par u , montrer que F peut s'écrire comme somme (directe) de sev des sous-espaces propres de u .

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

1. Si $\text{Card Sp}(u) = n$, déterminer le nombre de sev stables par u .
2. Que peut-on dire si $\text{Card Sp}(u) < n$?

Indications : 1. Observer que les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles puis, pour F stable, montrer que F est somme de sous-espaces propres de u en considérant u_F . En déduire que le choix d'une partie de $\text{Sp}(u)$ équivaut au choix d'un sev stable par u .
2. Justifier l'existence d'un plan vectoriel stable puis construire une infinité de droites vectorielles stables dans ce plan.

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

Indications : Notant u, v dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ respectivement canoniquement associés à A et B , considérer $\mathcal{B}$ une base obtenue par complétion d'une base de $\text{Ker } u$.

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

Le résultat subsiste-t-il pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$?

Indications : Pour le sens indirect, observer que

$$E = \text{Ker } f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f^2) \setminus \{0\}} \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}) \right)$$

puis factoriser $(X^2 - \lambda)$ en notant $\pm \mu(\lambda)$ les racines carrées complexes de $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 9 (****)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u est non diagonalisable si et seulement s'il existe un plan vectoriel F stable par u et $\mathcal{B}$ une base de F tels que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u_F = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Indications : Observer qu'il existe α racine de π_u de multiplicité $\alpha \geq 2$. Notant $H = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^\alpha$ et $v = u_H$, vérifier l'inclusion stricte $\text{Ker}(v - \lambda \text{id}_H)^{\alpha-1} \subsetneq H$ et considérer $a \in H \setminus \text{Ker}(v - \lambda \text{id}_H)^{\alpha-1}$ pour choisir une famille de vecteurs (x, y) adaptée.

Exercice 10 (****)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\chi_A = \chi_B \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$$

Indications : Établir $\text{Tr}(P(A)) = \text{Tr}(P(B))$ pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ puis considérer des polynômes bien choisis.