

Intégrales à paramètres

Exercice 1.

1. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Alors on peut démontrer par récurrence que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ où P_n est un polynôme. Si $k \in \mathbb{N}$, alors $x^k P_n(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ par croissances comparées.

Donc $f \in \mathcal{S}$.

On utilisera dans tout l'exercice que si $f \in \mathcal{S}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k f^{(n)}(x)$ est dans $\mathcal{S}$. En effet, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$, et ses dérivées successives sont des sommes de fonctions du type $x \mapsto x^\ell f^{(p)}(x)$, qui multipliées par n'importe quelle puissance de x tendent bien vers 0 en $\pm\infty$.

2. — On montre déjà que $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Posons $g : (x, \xi) \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout ℓ dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{\partial^\ell g}{\partial \xi^\ell} = (-i)^\ell x^\ell g(x, \xi)$. Donc

— pour tout ℓ de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{\partial^\ell g}{\partial \xi^\ell}$ est intégrable (car, comme $f \in \mathcal{S}$, $x^2(-i)^\ell x^\ell f(x, \xi) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc g est intégrable par règle de Riemann)

— $x \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial \xi^n}$ est continue par morceaux.

— $\xi \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial \xi^n}$ est continue.

— pour tous x et ξ dans $\mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial^n g}{\partial \xi^n} \right| \leq |f(x)x^n|$, intégrable pour la même raison que ci-dessus.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$, et donc $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- On montre ensuite que toutes les dérivées de $\hat{f}$ décroissent plus vite que toutes les puissances de ξ .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a $\hat{f}^{(n)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^n f(x) e^{-ix\xi} dx$. On pose $g(x) = (-i)^n x^n f(x)$. Cette fonction est dans $\mathcal{S}$ d'après la remarque de début d'exercice. Par intégration par parties on a de plus :

$$\xi^k \hat{f}^{(n)}(\xi) = \xi^k \left[g(x) \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\xi^k}{i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) e^{-ix\xi} dx$$

Le crochet est nul car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |g(x)| = 0$. En intégrant $k+1$ fois par parties, on en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \xi^k \hat{f}^{(n)}(\xi) \right| &= \left| \frac{\xi^k}{i^{k+1}\xi^{k+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k+1)}(x) e^{-ix\xi} dx \right| = \left| \frac{1}{i^{k+1}\xi} \right| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k+1)}(x) e^{-ix\xi} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} |g^{(k+1)}(x)| dx \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\hat{f}$ est dans $\mathcal{S}$.

3. (a) On a $\hat{G}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

(b) Si $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{G}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Effectuons une IPP avec $u(x) = i e^{-ix\xi}$ et $v'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$. Alors $u'(x) = \xi e^{-ix\xi}$ et $v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$, et le crochet est nul, d'où : $\hat{G}'(\xi) = -\xi \hat{G}(\xi)$.

On a donc en résolvant l'équation différentielle : $\hat{G}(\xi) = A e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ avec $A \in \mathbb{C}$. De plus, $\hat{G}(0) = \sqrt{2\pi}$, donc on a bien $\hat{G} = \sqrt{2\pi} G$.

4. Il suffit de remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq K|f(t)|$ avec $|f|$ intégrable.
5. Faire le changement de variables $u = x - t$.
6. Soient f et g dans $\mathcal{S}$. Alors la dérivabilité de $f * g$ et ses dérivées successives sont obtenues par théorème de dérivation des intégrales à paramètres (à détailler), et $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} x^k (f * g)^{(n)}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(t) g^{(n)}(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t+t)^k f(t) g^{(n)}(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i f(t) (x-t)^{k-i} g^{(n)}(x-t) dt, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ par double limite (la domination vient du fait que f et g sont toutes deux dans $\mathcal{S}$).

7. Soit ξ dans $\mathbb{R}$. Alors, comme $f * g$ est intégrable, $\widehat{f * g}$ existe et

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) e^{-ix\xi} dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) e^{-ix\xi} dx dt \text{ en s'autorisant à permuter les intégrales} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) e^{-i(x-t)\xi} dx dt. \end{aligned}$$

D'où, en posant $y = x - t$: $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) e^{-i(x-t)\xi} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-iy\xi} dy = \hat{g}(y)$,

soit $\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} \hat{g}(\xi) dt = \hat{g}(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} dt = \boxed{\hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi)}$.

Exercice 2.

1. Puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et a une limite finie en $+\infty$, f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (à détailler). Ainsi il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq M$. En particulier par théorème de comparaison, pour tout $p > 0$, $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui permet de calculer $\mathcal{L}(f)(p)$.

On calcule alors pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$p \mathcal{L}(f)(p) = p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \underset{u=pt}{=} \int_0^{+\infty} f(u/p) e^{-u} du \xrightarrow{p \rightarrow 0^+} \ell \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \ell$$

car le théorème de convergence dominée s'applique puisque $|f(u/p)e^{-u}| \leq M e^{-u}$.

2. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $p > 0$, la fonction $t \mapsto F(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)e^{-pt} = 0$, d'où, par IPP :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = p \cdot \int_0^{+\infty} F(t)e^{-pt} dt.$$

La transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ et : $\boxed{\forall p \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathcal{L}(f)(p) = p \cdot \mathcal{L}(F)(p)}$.

La transformée $\mathcal{L}(F)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est continue sur cet intervalle : en effet, si on fixe $p_0 > 0$, la fonction $t \mapsto F(t)e^{-p_0 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathcal{L}(F)$ sur l'intervalle $[p_0, +\infty[$. Par (1), on déduit la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, d'après 1. pour F :

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{+\infty} F = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \mathcal{L}(F)(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(p)$$

donc $\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est continue en } 0}$.

3. Vous avez vu que cette intégrale convergeait. Appliquons alors 2. à $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, prolongée par continuité en zéro : sa transformée de Laplace est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Posons $g = \mathcal{L}(f)$ et $h : (p, t) \mapsto e^{-pt} f(t)$.

On a $\frac{\partial h}{\partial p}(p, t) = -e^{-pt} \sin t$ et, si $a > 0$, la majoration $\left| \frac{\partial h}{\partial p}(p, t) \right| \leq e^{-at}$, valable pour $(p, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$,

prouve que la fonction $g = \mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$g'(p) = - \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt = - \frac{1}{1+p^2},$$

en effectuant deux IPP. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(p) = C - \arctan p$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-pt} \frac{\sin(t)}{t} = 0$, et $\forall p \geq a, \forall t \in \mathbb{R}_+, |e^{-pt} f(t)| \leq e^{-at} f(t)$ intégrable.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = 0$, donc $C = \frac{\pi}{2}$ et

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, g(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \frac{\pi}{2} - \arctan p.$$

Or, $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0 donc : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \mathcal{L}(f)(0) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(p) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 3.

1. Soit $t \geq t_0$. Alors

$$|e^{-t\varphi(x)} f(x)| = e^{-(t-t_0)\varphi(x)} |e^{-t_0\varphi(x)} f(x)| \leq e^{-(t-t_0)\varphi(0)} |e^{-t_0\varphi(x)} f(x)|,$$

car φ est croissante. Comme $x \mapsto |e^{-t_0\varphi(x)} f(x)|$ est intégrable, $x \mapsto e^{-t\varphi(x)} f(x)$ est intégrable.

Donc $\boxed{F \text{ est définie dès que } t \geq t_0}$.

2. On se ramène à $t_0 = 0$ par la translation $t - t_0$. Ainsi on suppose simplement que f est intégrable.

- (a) Soit α dans $]0, +\infty[$. Alors pour tout $t \geq 0$, $e^{-t\varphi(x)} \leq e^{-t\varphi(\alpha)}$ par croissance de φ . Alors $|e^{-t\varphi(x)} f(x)| \leq |f(x)|$, d'où, en intégrant et par intégrabilité de f ,

$$\left| t \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx \right| \leq t \int_{\alpha}^{+\infty} |e^{-t\varphi(x)} f(x)| dx \leq t e^{-t\varphi(\alpha)} \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)| dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

car $\alpha > 0$.

- (b) Effectuons le changement de variables $y = tx$. Alors

$$\int_0^{\alpha} e^{-tx} f(x) dx = \int_0^{t\alpha} e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right) \frac{dy}{t} = \frac{1}{t} \int_0^{t\alpha} e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right) dy.$$

Reste à montrer que $\int_0^{t\alpha} e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right) dy$ tend vers $f(0)$ quand t tend vers $+\infty$. Déjà,

$$\int_0^{t\alpha} e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right) dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} \mathbf{1}_{y \leq t\alpha} f\left(\frac{y}{t}\right) dy.$$

Or, $y \mapsto \mathbf{1}_{y \leq t\alpha} f\left(\frac{y}{t}\right)$ tend vers $f(0)$ quand t tend vers $+\infty$, et $\left| e^{-y} \mathbf{1}_{y \leq t\alpha} f\left(\frac{y}{t}\right) \right| \leq K e^{-y}$, où K est une borne de f sur $[0, \alpha]$. Donc, par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \mathbf{1}_{y \leq t\alpha} f\left(\frac{y}{t}\right) dy \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y} f(0) dy = f(0).$$

On en déduit, comme on a supposé que $f(0) \neq 0$, que $\boxed{\int_0^{\alpha} e^{-tx} f(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}}$.

- (c) On a : $\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx = \int_0^{\alpha} e^{-tx} f(x) dx + \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx$.

Or d'après le a), on a $\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx = o\left(\frac{1}{t}\right)$. Donc d'après la question b), $\boxed{F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}}$.

3. On pose $y = \varphi(x)$. Comme φ est continue, strictement croissante, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vérifie $\varphi(0) = 0$, d'après le théorème de la bijection continue, φ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, qui plus est de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas, donc sa bijection réciproque est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, si l'on applique la formule de changement de variables :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-ty} f \circ \varphi^{-1}(y) \frac{dy}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}.$$

D'où, en appliquant le résultat précédent à la fonction $y \mapsto f \circ \varphi^{-1}(y) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-ty} f \circ \varphi^{-1}(y) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} dy \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(\varphi^{-1}(0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))t} = \boxed{\frac{f(0)}{\varphi'(0)t}}$$

4. Si $\alpha > 0$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} f(x) dx = \int_0^{\alpha} e^{-tx^2} f(x) dx + \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-tx^2} f(x) dx$.

On va montrer que la seconde intégrale est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ et la première correspond à l'équivalent qui nous intéresse. Déjà,

$$\left| \sqrt{t} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-tx^2} f(x) dx \right| \leq \sqrt{t} e^{-t\alpha^2} \int_0^{+\infty} |f(x)| dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ensuite,

$$\sqrt{t} \int_0^{\alpha} e^{-tx^2} f(x) dx \underset{y=\sqrt{t}x}{=} \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-y^2} f\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) dy \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} f(0) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0).$$

D'où le résultat par le même raisonnement qu'en 2.

5. L'idée est encore de se ramener au cas précédent. Comme $\varphi' > 0$ et $\varphi(0) = 0$, $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\psi = \sqrt{\varphi}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à voir la dérivabilité en 0 :

$$\sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{\varphi''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{2}}x + o(x),$$

d'où la dérivabilité en 0, avec $\psi'(0) = \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{2}}$.

On pose alors $y = \psi(x)$. Alors le changement de variable dans l'intégrale donne

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-ty^2} f \circ \psi^{-1}(y) \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))} \, dy \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \frac{f \circ \psi^{-1}(0)}{\psi'(0)} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2t}} \frac{f(0)}{\sqrt{\varphi''(0)}}},$$