

ESPACE VECTORIEL NORMÉ

B. Landelle

Table des matières

I	Normes et espace vectoriel normé	2
1	Définitions	2
2	Normes classiques en dimension finie	4
3	Normes classiques en dimension infinie	6
II	Suites d'un espace vectoriel normé	6
1	Définitions	7
2	Convergence	7
3	Valeur d'adhérence	8
III	Comparaison de normes	9
1	Normes équivalentes	9
2	Cas de la dimension finie	11
3	Comparaisons de normes classiques	12

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$ -ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

I Normes et espace vectoriel normé

1 Définitions

Définition 1. On appelle norme sur E une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. Homogénéité : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

2. Inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

3. Séparation : $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \implies x = 0_E$

Un espace vectoriel E muni d'une norme N est dit espace vectoriel normé.

Notations : On note habituellement $\|\cdot\|$ une norme sur E .

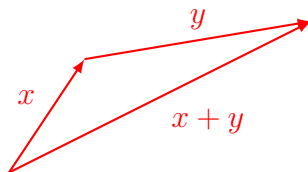


FIGURE 1 – Inégalité triangulaire

Remarque : Pour $(x, y) \in E^2$, on a $\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|y\|$ (un signe $+$ dans le majorant!).

Vocabulaire : Un vecteur de norme égale à 1 est dit *unitaire*.

Exemples : 1. $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

2. Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|$ pour $f \in E$, quantité bien définie puisqu'une fonction continue sur $[0; 1]$ y est bornée. C'est une norme sur E . La séparation est immédiate. Pour $(f, g) \in E^2$, on a

$$\forall t \in [0; 1] \quad |(f + g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

et par passage à la borne supérieure

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Soit λ un scalaire et $f \in E$. D'après le théorème des bornes atteintes, on dispose de $t_0 \in [0; 1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Ainsi

$$\forall t \in [0; 1] \quad |\lambda f(t)| = |\lambda| |f(t)| \leq |\lambda| \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad |\lambda f(t_0)| = |\lambda| \|f\|_\infty$$

d'où

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$$

Définition 2. Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne* sur E l'application définie par $x \in E \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposition 1. Soit E un espace préhilbertien réel. La norme euclidienne sur E est une norme.

Démonstration. L'homogénéité et la séparation sont immédiates. L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

Définition 3. Soit E un espace vectoriel normé. On appelle *distance associée à la norme $\|\cdot\|$* l'application notée d définie par

$$E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

Proposition 2. Soit d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E un espace vectoriel normé. On a

1. $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$
2. $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Démonstration. Immédiate. $\square$

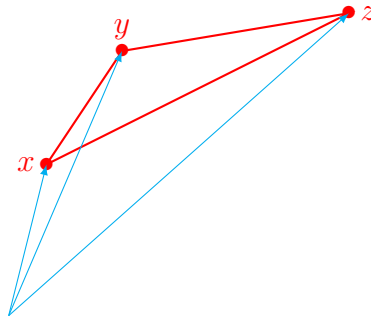


FIGURE 2 – Inégalité triangulaire

Remarque : On peut définir une distance vérifiant ces trois propriétés indépendamment du choix d'une norme. On parle dans ce cas d'*espace métrique*. Un espace métrique n'est pas nécessairement issu d'un espace normé : on munit E de la *distance discrète* définie par $d(x, y) = 1 - \delta_{x,y}$ pour $(x, y) \in E^2$. C'est une distance et on a clairement $d(\lambda x, 0) \neq |\lambda| d(x, 0)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \neq 0, 1$ et $x \neq 0_E$.

Proposition 3 (Inégalité triangulaire inverse). Soit E un espace vectoriel normé. On a

1. $\forall (x, y) \in E^2 \quad |||x| - |y||| \leq \|x - y\|$
2. $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$



FIGURE 3 – Inégalité triangulaire inverse

Démonstration. 1. Par inégalité triangulaire, on a $\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ d'où $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ et on conclut par symétrie des rôles.
2. On applique le résultat précédent en remplaçant x par $x-z$ et y par $y-z$. $\square$

Définition 4. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . Pour $x \in E$, on définit la distance de x à A notée $d(x, A)$ par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Remarque : L'ensemble $\{d(x, a), a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée (par zéro) et admet donc une borne inférieure finie.

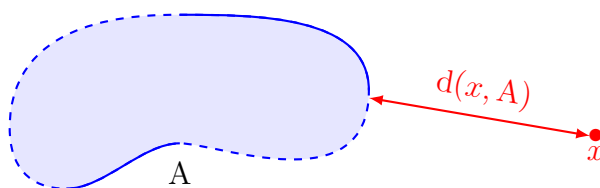


FIGURE 4 – Distance à une partie

Définition 5. Soit E un espace vectoriel normé. Une partie A de E est dite bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in A \quad \|x\| \leq M$$

Soit X un ensemble. Une fonction $f : X \rightarrow E$ est dite bornée si son image est bornée, c'est-à-dire s'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leq M$$

2 Normes classiques en dimension finie

Définition 6. Sur $\mathbb{K}^n$, on définit les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ respectivement par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_k|$$

Exemples : Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (isomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$), on a

$$\|A\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^2} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$$

Théorème 1. Les applications $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Pour $\| \cdot \|_1$, l'homogénéité est immédiate, la séparation résulte du fait qu'une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul et l'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité de la valeur absolue ou du module.

Pour $\| \cdot \|_2$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la norme euclidienne canonique. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour $x \in \mathbb{K}^n$, on note $|x| = (|x_i|)_i$. On observe sans difficulté que $\|x\|_2 = \| |x| \|_2$. On déduit du cas réel l'homogénéité et la séparation. Pour l'inégalité triangulaire, avec $|a + b| \leq |a| + |b|$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, il vient pour x, y dans $\mathbb{K}^n$

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^2 = \| |x| + |y| \|^2$$

Le résultat suit d'après l'inégalité triangulaire dans le cas réel.

Pour $\| \cdot \|_\infty$, la séparation est immédiate. Pour x, y dans $\mathbb{K}^n$, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Soit λ un scalaire et $x \in \mathbb{K}^n$. On note $k_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|x_{k_0}| = \|x\|_\infty$. On a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |\lambda x_k| = |\lambda| |x_k| \leq |\lambda| \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad |\lambda x_{k_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty$$

d'où $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$

□

Définition 7. Soit $(E_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ une famille finie de $\mathbb{K}$ -ev. On munit l'ensemble $E = \prod_{i=1}^p E_i$ des opérations

$$\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x + y = (\lambda \cdot x_i + y_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$$

On dit que E est l'espace produit des espaces vectoriels E_i .

Remarque : Par abus de langage, on parle de l'espace produit E pour désigner le triplet $(E, +, \cdot)$.

Proposition 4. Soit $(E_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ une famille finie de $\mathbb{K}$ -ev et E l'espace produit des E_i . L'espace produit E est un $\mathbb{K}$ -ev.

Démonstration. Héritage des structures d'espace vectoriel des E_i .

□

Proposition 5. Soit $(E_i, \| \cdot \|_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ une famille finie de $\mathbb{K}$ -ev normés et E l'espace produit des E_i . On peut définir les normes dites normes produits sur E par

$$\forall x = (x_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket} \in E \quad N_1(x) = \sum_{i=1}^p \|x_i\| \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^p \|x_i\|^2} \quad N_\infty(x) = \max_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket} \|x_i\|$$

Démonstration. Vérification identique aux normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

□

Remarque : On note $\| \cdot \|$ indifféremment de l'espace E_i considéré, l'ambiguïté se levant d'elle-même lors du calcul d'une norme.

3 Normes classiques en dimension infinie

Soit X un ensemble non vide.

Définition 8. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$.

Proposition 6. L'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

Démonstration. Sans difficulté, on vérifie que c'est un sev de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. □

Définition 9. On définit l'application $\| \cdot \|_\infty$ sur l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ par

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K}) \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)|$$

Sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K})$ avec $a < b$, on définit les applications norme de la convergence en moyenne notée $\| \cdot \|_1$ et norme de la convergence en moyenne quadratique notée $\| \cdot \|_2$ par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K}) \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt}$$

Remarque : Pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, l'ensemble $\{|f(t)|, t \in X\}$ est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ et admet donc une borne supérieure finie.

Théorème 2. L'application $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$. Les applications $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K})$.

Démonstration. Pour $\| \cdot \|_\infty$, preuve immédiate pour la séparation. Soit $(f, \lambda) \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}$, on a

$$\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \text{si } \lambda \neq 0 \quad \|f\|_\infty = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda f \right\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty$$

d'où l'homogénéité. Puis

$$\forall t \in X \quad |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

L'inégalité triangulaire en découle.

Pour $\| \cdot \|_1$, séparation par séparation de l'intégrale car $|f|$ est continue positive. Les autres propriétés sont immédiates.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\| \cdot \|_2$ est euclidienne associée au produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) \, dt$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $|f + g| \leq |f| + |g|$ et on conclut avec l'inégalité triangulaire dans le cas réel. Les autres propriétés sont immédiates. □

II Suites d'un espace vectoriel normé

Dans ce qui suit, l'espace E est un $\mathbb{K}$ -evn.

1 Définitions

Définition 10. Une suite à valeurs dans E est une application $u : \mathbb{N} \mapsto E, n \mapsto u(n)$ que l'on note $u, (u_n), (u_n)_n$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et où u_n désigne $u(n)$.

Exemple : Soit $u_n = (n, \sin(n))$ pour n entier. La suite $(u_n)_n$ est à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 7. L'ensemble des suite à valeurs dans E noté $E^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

Démonstration. Immédiate (structure héritée de celle de E). □

Définition 11. La suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E est dite bornée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E ou de manière équivalente si

$$\exists M \geq 0 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leq M$$

Définition 12. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites à valeurs dans des $\mathbb{K}$ -evn. On dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_n$ que l'on note $u_n = O(v_n)$ si $\|u_n\| = O(\|v_n\|)$. On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ que l'on note $v_n = o(v_n)$ si $\|u_n\| = o(\|v_n\|)$.

Remarques : (1) Il s'agit évidemment de relations asymptotiques, c'est-à-dire pour $n \rightarrow +\infty$ (implicite dans la notation).

(2) Comme pour des suites scalaires, la relation $u_n = O(1)$ signifie que la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Définition 13. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1;p]}$ une base de E . Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs dans E . Pour n entier, le terme u_n s'écrit $u_n = \sum_{i=1}^p u_{i,n} e_i$. Les suite réelles ou complexes $(u_{i,n})_n$ sont appelées suites coordonnées de la suite $(u_n)_n$ relatives à la base $\mathcal{B}$.

Définition 14. Soit $(E_i, \|\cdot\|)_{i \in [1;p]}$ une famille de $\mathbb{K}$ -ev normés et E l'espace produit des E_i . Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Pour n entier, le terme u_n s'écrit $u_n = (u_{i,n})_{i \in [1;p]}$. Les suites vectorielles $(u_{i,n})_n$ sont appelées suites coordonnées de la suite $(u_n)_n$.

2 Convergence

Définition 15. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de E converge (ou est convergente) s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$

Remarque : Définition identique avec la dernière inégalité stricte car ε est quelconque > 0 . (on passe de large en $\varepsilon/2$ à stricte en ε et de stricte à large sans effort)

Vocabulaire : Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Proposition 8. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E convergente. Alors sa limite est unique.

Démonstration. Soient ℓ_1, ℓ_2 des limites de $(u_n)_n$. Pour n entier, on a $\|\ell_1 - \ell_2\| \leq \|\ell_1 - u_n\| + \|u_n - \ell_2\| = o(1)$ d'où $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$ et le résultat suit par séparation. □

Notations : On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

Remarque : Comme pour les suites scalaires, la relation $u_n = o(1)$ signifie $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0_E$.

Proposition 9. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E convergente. Alors la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Démonstration. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leq 1 + \|\ell\|$ pour $n > N$ et on prend $C = \max(\|u_k\|, k \in \llbracket 0; N \rrbracket, 1 + \|\ell\|)$. $\square$

Théorème 3. L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$ -ev et l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire, i.e. pour $(u_n)_n, (v_n)_n$ dans $E^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell, v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \ell + \ell'$$

Démonstration. Par inégalité triangulaire, on a

$$\|\lambda u_n + v_n - (\lambda \ell + \ell')\| \leq |\lambda| \|u_n - \ell\| + \|v_n - \ell'\| = o(1)$$

La suite nulle étant évidemment convergente, ceci prouve que l'ensemble des suites convergentes à valeurs dans E est un sev de $E^{\mathbb{N}}$ et que l'application limite est linéaire. $\square$

Proposition 10. Soient $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes avec $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ et $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$. On a

$$\alpha_n u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha \ell$$

Démonstration. On clone la preuve pour le produit des limites. Notons $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ et $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$. On a

$$\|\alpha_n u_n - \alpha \ell\| \leq \|\alpha_n u_n - \alpha_n \ell\| + \|\alpha_n \ell - \alpha \ell\| \leq \underbrace{|\alpha_n|}_{=O(1)} \|u_n - \ell\| + |\alpha_n - \alpha| \|\ell\| = o(1)$$

Le résultat suit. $\square$

3 Valeur d'adhérence

Définition 16. Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs dans E et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice, c'est-à-dire une injection strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est dite suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_n$.

Notation : On note aussi $n_k = \varphi(k)$ et $(u_{n_k})_k$ une suite extraite.

Remarque : On rappelle que pour φ extractrice, on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout n entier (par récurrence).

Proposition 11. Toute suite extraite d'une suite $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergente est convergente de même limite. S'il existe une suite divergente extraite de $(u_n)_n$, alors $(u_n)_n$ est divergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ convergente de limite $\ell \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un seuil p entier tel que pour $n \geq p$, on a $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$. Soit φ une extractrice. On a $\varphi(n) \geq n$ d'où $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$ pour $n \geq p$. En particulier, on a l'implication

$$(u_n)_n \text{ convergente} \implies (u_{\varphi(n)})_n \text{ convergente}$$

La contraposée donne la dernière assertion. $\square$

Définition 17. Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs dans E . On appelle valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ toute limite d'une suite convergente extraite de $(u_n)_n$.

Exemples : 1. La suite $((-1)^n)_n$ admet 1 et -1 pour valeurs d'adhérence.

2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie. On pose $u_n = (\cos(\pi n), \cos(2\pi n/3)) + 1/n(1, 1)$ pour n entier non nul. On a

$$u_{6n} = (1, 1) + \frac{1}{6n}(1, 1) \quad u_{6n+1} = (-1, -1/2) + \frac{1}{6n+1}(1, 1) \quad \text{etc.}$$

Les valeurs $(1, 1)$, $(-1, -1/2)$, etc. sont valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$.

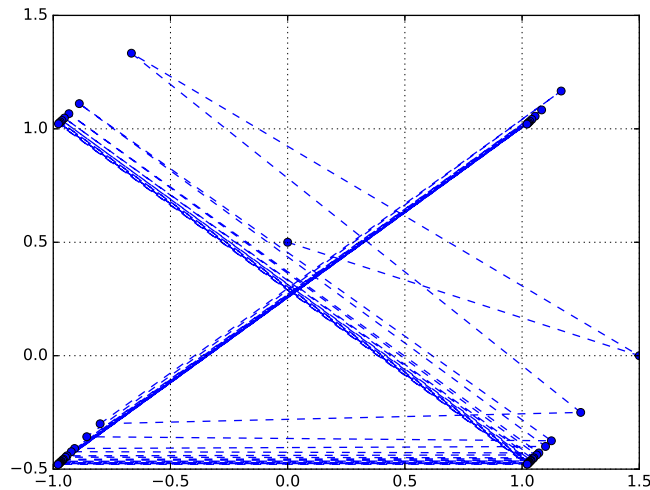


FIGURE 5 – Suites des points $(u_n)_n$

On observe nettement la présence de 4 points valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

III Comparaison de normes

1 Normes équivalentes

Définition 18. Soient N_1, N_2 deux normes sur E . On dit que N_2 est plus fine que N_1 s'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leq \beta N_2(x)$$

Remarque : Cette notion n'est pas officiellement au programme bien qu'elle soit naturellement utilisée en pratique. Ce n'est pas une relation d'ordre (pas antisymétrique).

Définition 19. Deux normes N_1, N_2 sur E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$$

Remarque : Deux normes sont équivalentes si et seulement si chacune est plus fine que l'autre.

Exemple : Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Ce sont bien des normes (l'homogénéité découle de celle de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, séparation et inégalité triangulaire sont immédiates). On a clairement $N_2(f) \leq N_1(f)$. Puis

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \implies |f(x)| \leq |f(0)| + x\|f'\|_\infty \leq N_2(f)$$

Par suite $N_1(f) \leq 2N_2(f)$

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes. En considérant $f = t \mapsto t$ et $f = t \mapsto 1$, on peut établir que les constantes obtenues sont optimales.

Proposition 12. *L'équivalence de normes est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Immédiate (symétrique, réflexive, transitive). □

Proposition 13. *Deux normes équivalentes définissent les mêmes parties bornées de E.*

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 14. *Soient N_1, N_2 des normes sur E. On a*

$$N_1, N_2 \text{ équivalentes} \iff \frac{N_1}{N_2} \text{ et } \frac{N_2}{N_1} \text{ bornées sur } E \setminus \{0_E\}$$

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 15. *Soient N_1, N_2 deux normes sur E. On a*

$$N_1, N_2 \text{ non équivalentes} \iff \exists (x_n)_n \in (E \setminus \{0_E\})^\mathbb{N} \mid \frac{N_1}{N_2}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ ou } +\infty$$

Démonstration. Immédiate par négation du résultat précédent. □

Exemple : Soit $E = \mathbb{K}[X]$, pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ (les a_n sont nuls à partir d'un certain rang), on

pose $N_1(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ et $N_2(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Notant $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$, on a

$$N_1(P_n) = 1 \quad \text{et} \quad N_2(P_n) = n + 1 \implies \frac{N_2}{N_1}(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Ainsi, les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Remarque : En pratique, pour comparer des normes sur $\mathbb{K}[X]$, il faut au moins tester pour la suite $(X^n)_n$ et de même pour des normes sur $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{K})$ avec $(t \mapsto t^n)_n$.

Proposition 16. *Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes et celles-ci ont même limite pour les deux normes.*

Démonstration. Immédiate. □

Remarque : On dispose en fait de l'équivalence

Deux normes sont équivalentes $\iff$ elles définissent les mêmes suites convergentes

Supposons que $\frac{N_1}{N_2}$ n'est pas borné sur $E \setminus \{0_E\}$. Considérons $(x_n)_n$ une suite telle $\frac{N_1}{N_2}(x_n) \geq n$ pour tout n entier non nul. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad y_n = \sqrt{n} \frac{x_n}{N_1(x_n)}$$

Alors $N_1(y_n) = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $0 \leq N_2(y_n) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ainsi, la suite $(y_n)_n$ est de limite nulle pour N_2 mais non bornée donc non convergente pour N_1 . Le cas $\frac{N_2}{N_1}$ non borné sur $E \setminus \{0_E\}$ vient par symétrie des rôles. Par contraposition, on en déduit le sens indirect.

2 Cas de la dimension finie

Théorème 4. *En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Plus tard (requiert de la compacité). □

Corollaire 1. *Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1; p]}$ une base de E . Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs dans E . On a*

$$(u_n)_n \text{ convergente} \iff \forall i \in [1; p] \quad (u_{i,n})_n \text{ converge}$$

Dans ce cas
$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_{i,n} \right) e_i$$

Démonstration. On suppose que $(u_{i,n})_n$ converge pour tout $i \in [1; p]$. Ainsi, pour tout $i \in [1; p]$, il existe $\ell_i \in \mathbb{K}$ tel que $u_{i,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_i$. On pose $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\|u_n - \ell\| = \left\| \sum_{i=1}^p (u_{i,n} - \ell_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p |u_{i,n} - \ell_i| \|e_i\|$$

Le résultat suit.

On suppose $(u_n)_n$ convergente. On dispose donc de $\ell \in E$ tel que $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Les normes sur E étant équivalentes, on munit l'espace E de la norme $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ et on a $\|u_n - \ell\|_{\infty, \mathcal{B}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On note $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$. Pour $k \in [1; p]$, il vient

$$\|u_n - \ell\|_{\infty, \mathcal{B}} = \max_{i \in [1; p]} |u_{i,n} - \ell_i| \geq |u_{k,n} - \ell_k|$$

Le résultat suit. □

Exemples : 1. $(e^{-n}, \cos(1/n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 1)$

2.
$$A_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^{i+j-2} \right)_{1 \leq i, j \leq p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq p}$$

Corollaire 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ une base de E . Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs dans E . On a

$$(u_n)_n = O(1) \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad (u_{i,n})_n = O(1)$$

Démonstration. Supposons les suites coordonnées bornées. Pour n entier, on a

$$\|u_n\| \leq \sum_{i=1}^p |u_{i,n}| \|e_i\| = O(1)$$

Supposons $u_n = O(1)$, c'est-à-dire $\|u_n\| = O(1)$. Les normes sur E étant équivalentes, on munit l'espace E de la norme $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ et on a $\|u_n\|_{\infty, \mathcal{B}} = O(1)$. Puis

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad |u_{k,n}| \leq \max_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket} |u_{i,n}| = \|u_n\|_{\infty, \mathcal{B}} = O(1)$$

□

Remarque : Si l'espace E est muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$, l'équivalence des normes n'est pas invoquée (remarque utile pour établir justement l'équivalence des normes en dimension finie).

Proposition 17. Soit $(E_i, \|\cdot\|)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ une famille de $\mathbb{K}$ -ev normés et E l'espace produit des E_i . Les normes produits sur E sont équivalentes.

Démonstration. Pour $x = (x_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket} \in \prod_{i=1}^p E_i$, on pose $u = (\|x_i\|)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ et on utilise l'équivalence des $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^p$. □

Corollaire 3. Soit $(E_i, \|\cdot\|)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ une famille de $\mathbb{K}$ -ev normés et E l'espace produit des E_i . Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs dans E . On a

$$(u_n)_n \text{ convergente} \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad (u_{i,n})_n \text{ converge}$$

Dans ce cas

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{i,n} \right)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$$

Démonstration. Les normes produits sur E étant équivalentes, on munit E de $\|\cdot\|_\infty$. La preuve est alors identique à celle du corollaire 1. □

Remarque : On peut aussi décliner le résultat sur le caractère borné dans un espace produit.

3 Comparaisons de normes classiques

Proposition 18. On a pour tout $x \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

et ces inégalités sont optimales.

Démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. On a

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_{i_0}| = n\|x\|_\infty$$

Puis
$$\|x\|_\infty = \sqrt{|x_{i_0}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \|x\|_2 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_{i_0}|^2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

On a
$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right)^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| |x_j| \geq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} = \sqrt{n} \|x\|_2$$

Enfin, on prend $x = (1, 0, \dots, 0)$ pour chaque inégalité de gauche et $x = (1, \dots, 1)$ pour chaque inégalité de droite pour vérifier l'optimalité des constantes. $\square$

Proposition 19. Sur $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. Deux à deux, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Démonstration. Considérons $f_n : t \mapsto t^n$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \quad \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 t^{2n} dt} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \|f_n\|_\infty = 1$$

Ainsi
$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} \sim \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Le résultat suit. $\square$

Remarques : (1) L'espace E est de dimension infinie puisque la famille $(f_n)_n$ est libre infinie en tant que famille de fonctions polynomiales non nulles échelonnées en degré.

(2) On peut compléter l'étude de comparaison de ces normes. Soit $f \in E$. On a clairement $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ et $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ ce qui prouve que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 dt} = \|f\|_2$$

ce qui prouve que $\|\cdot\|_2$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$. Mais il n'y a pas d'autre relation de finesse entre ces trois normes d'après la preuve de la proposition précédente.

(3) Pour des normes non équivalentes, on peut observer des comportements asymptotiques différents. Considérant la situation de la proposition précédente, supposons que la suite $(f_n)_n$ admette une valeur d'adhérence f dans E muni de $\|\cdot\|_\infty$. On a $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$ d'où, pour une certaine extractrice φ ,

$$f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_1} f$$

D'après les calculs précédents, on en déduit $f = 0$ puis $\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty = \|f_{\varphi(n)}\|_\infty = 1$ pour n entier, ce qui est absurde. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ est de limite nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$ alors qu'elle n'admet pas de valeur d'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.