

Feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$
2. $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$
3. $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$
4. $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$

Corrigé : On a $(1) \Rightarrow (2)$ clairement. Supposons (2). On a toujours $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$. Soit $y \in \text{Im } f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et il existe $(a, b) \in E \times \text{Ker } f$ tel que $x = f(a) + b$ d'où $y = f(x) = f(f(a) + b) = f^2(a) \in \text{Im } f^2$. Ainsi, on a $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ donc $(2) \Rightarrow (3)$. On a toujours $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$. D'après le théorème du rang et par égalité dimensionnelle, il vient $(3) \Rightarrow (4)$. Enfin, supposons (4). Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ et $f^2(t) = f(x) = 0$ d'où $t \in \text{Ker } f^2$. Or $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ d'où $f(t) = 0$ i.e. $x = 0$. Le théorème du rang fournit l'égalité dimensionnelle qui permet de conclure que $(4) \Rightarrow (1)$. Ainsi

Les quatre assertions sont équivalentes.

Exercice 2 (*)

Soient E, F des $\mathbb{K}$ -ev et f, g dans $\mathcal{L}(E, F)^2$ avec $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$ de dimension finie. Montrer

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Corrigé : On a clairement

$$\text{Im}(f + g) = \{f(x) + g(x), x \in E\} \subset \text{Im } f + \text{Im } g = \{f(x) + g(y), (x, y) \in E \times F\}$$

Passant aux dimensions, il vient

$$\text{rg}(f + g) \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g)$$

D'après la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim(\text{Im } f + \text{Im } g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim \text{Im } f \cap \text{Im } g \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

d'où

$$\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Ensuite, avec l'inégalité précédemment établie, en remarquant $\text{rg}(-g) = \text{rg}(g)$, il vient

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f + g - g) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f + g) + \text{rg}(g)$$

d'où

$$\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f + g)$$

Par symétrie des rôles en f et g , on a également

$$\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + g)$$

On conclut

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Exercice 3 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A triangulaire supérieure stricte. Montre que $A^n = 0$.

Corrigé : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notons

$$\mathcal{P}(k) : f^k(e_k) = 0$$

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(i)$ vraie pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ avec $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ fixé. Compte-tenu de la forme triangulaire supérieure stricte, on a dispose de scalaires α_i tels que

$$f^{k+1}(e_{k+1}) = f^k(f(e_{k+1})) = f^k\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^k f^{k-i} \circ f^i(e_i) = 0_E$$

ce qui clôt la récurrence. Par conséquent, on a $f^n(e_k) = f^{n-k} \circ f^k(e_k) = 0_E$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\boxed{f^n = 0}$$

Exercice 4 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(M) I_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer φ^2 et $\operatorname{Tr}(\varphi)$.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E , linéaire par linéarité de la trace et du produit.

On trouve

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi}$$

L'application φ est le projecteur sur $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(I_n)$. En considérant une base adaptée, on en déduit

$$\boxed{\operatorname{Tr}(\varphi) = n^2 - 1}$$

Exercice 5 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi : E \rightarrow E, M \mapsto M^\top$. Calculer $\det(\Phi)$.

Corrigé : L'application Φ est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. En considérant une base adaptée, on a donc

$$\boxed{\det \Phi = (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K})} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Exercice 6 (**)

Soient p et q des projecteurs de E . Montrer

$$p + q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0$$

Quand cette condition est réalisée, montrer que

$$\operatorname{Im} p + q = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \quad \operatorname{Ker} p + q = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$$

Corrigé : On a $p + q$ projecteur $\iff p \circ q + q \circ p = 0$

Le sens indirect est évident. Pour le sens direct, on compose par exemple par p à droite puis à gauche et on trouve

$$p \circ q = -p \circ q \circ p = q \circ p$$

D'où sa nullité. Supposons la condition réalisée. L'inclusion $\text{Im } p+q \subset \text{Im } p + \text{Im } q$ est immédiate. Pour la réciproque, soit $x = p(a) + q(b)$ avec $(a, b) \in E^2$. On a

$$(p+q)(x) = (p+q)(p(a) + q(b)) = p(a) + p \circ q(a) + q \circ p(b) + q(b) = x$$

Puis, on a clairement $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker } p+q$. Si $x \in \text{Ker } p+q$, on a $(p+q)(x) = 0$. En appliquant p ou q à cette relation, il vient

$$p \circ (p+q)(x) = p(x) = 0 \quad \text{et} \quad q \circ (p+q)(x) = q(x) = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Im } p+q = \text{Im } p + \text{Im } q \quad \text{et} \quad \text{Ker } p+q = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q}$$

Exercice 7 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in E$ avec $\text{rg}(H) = 1$.

1. Montrer que H est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ avec les α_i réels.

2. Montrer $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \det(A-H)\det(A+H) \leq \det(A)^2$

Corrigé : 1. Notons $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à H . On a $\text{Im } h = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ avec ε_1 un vecteur non nul que l'on complète en $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E . On a $h(\varepsilon_i) \in \text{Im } h = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ d'où

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \quad | \quad h(\varepsilon_i) = \alpha_i \varepsilon_1$$

Ainsi, la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ a la forme attendue et par caractérisation géométrique de la similitude, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice } H \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ avec les } \alpha_i \text{ réels.}}$$

2. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. En factorisant, on obtient

$$\det(A-H)\det(A+H) = \det(A)^2 \det(I_n - K) \det(I_n + K) \quad \text{avec} \quad K = A^{-1}H$$

Comme $A^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{rg } K = 1$. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$L = P^{-1}KP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ avec les } \alpha_i \text{ réels}$$

Ainsi

$$\det(I_n + K) \det(I_n - K) = \det(I_n + L) \det(I_n - L) = \begin{vmatrix} 1 - \alpha_1^2 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha_1^2 \leq 1$$

Par conséquent

$$\boxed{\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \det(A - H) \det(A + H) \leq \det A^2}$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f_1, \dots, f_r$ des endomorphismes de E tels que $\sum_{i=1}^r f_i = \text{id}$ et

$\sum_{i=1}^r \text{rg}(f_i) \leq n$. Montrer

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2 \quad f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im } f_i$$

Corrigé : On a $\sum_{i=1}^r f_i = \text{id}$ d'où $E = \text{Im } \sum_{i=1}^r f_i \subset \sum_{i=1}^r \text{Im } f_i \subset E$

et les inclusions sont donc des égalités. Passant à la dimension, on obtient

$$\dim E = \dim \sum_{i=1}^r \text{Im } f_i \leq \sum_{i=1}^r \dim \text{Im } f_i \leq \dim E$$

donc les inégalités sont des égalités et il en résulte que $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im } f_i$. Enfin, pour $x \in E$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad f_i(x) = \sum_{j=1}^r f_i \circ f_j(x)$$

et par unicité de la décomposition dans $\bigoplus_{i=1}^r \text{Im } f_i$, il vient

$$f_i(x) = f_i^2(x) \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j(x) = 0$$

D'où

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2 \quad f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im } f_i}$$

Exercice 9 (*)

Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir A semblable à B .

Corrigé : Supposons A et B semblables. Alors, les matrices ont même trace et même déterminant d'où

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta = -\alpha\beta \end{cases}$$

et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\text{Les matrices } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \text{ sont semblables si et seulement si } \alpha = \beta = 0.}$$

Remarque : On peut aussi invoquer l'égalité $\chi_A = \chi_B$, ou aussi A^2 semblable à $B^2 \dots$

Exercice 10 (**)

Soit n entier et $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de la base canonique $\mathcal{C} = (X^k)_{0 \leq k \leq n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Corrigé : Les polynômes P_k sont échelonnées en valuation et forme donc une famille libre de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$ ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Puis, pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a

$$X^j = X^j(1 - X + X)^{n-j} = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1 - X)^k X^{n-j-k} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1 - X)^k X^{n-k}$$

Ainsi La famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et on a $X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} P_{n-k}$ pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Remarque : On peut aussi observer que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de cardinal égal à $\dim \mathbb{R}_n[X]$ pour conclure qu'il s'agit d'une base.

Exercice 11 (**)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ ce qui équivaut à $AP = PB$. Notons $P_1 = \operatorname{Re} P$ et $P_2 = \operatorname{Im} P$. Ainsi, on a $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{C} \quad \varphi(t) = \det(P_1 + tP_2)$$

On a φ polynomiale en t et $\varphi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det P \neq 0$. Par suite, il existe α réel tel que $\varphi(\alpha) \neq 0$ (sinon, φ aurait une infinité de racines et serait donc le polynôme nul). Il s'ensuit

$$A(P_1 + \alpha P_2) = (P_1 + \alpha P_2)B \quad \text{et} \quad \det(P_1 + \alpha P_2) \neq 0$$

On conclut

A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et F un sev de E de dimension $n - p$ ($p \leq n$). Montrer qu'il existe $H_1, \dots, H_p$ hyperplans de E tels que $F = \bigcap_{k=1}^p H_k$.

Corrigé : Soit $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F que l'on complète par la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ telle que $(\varepsilon_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de E . Pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, posons

$$\varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}, \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \mapsto \alpha_i$$

On a clairement φ_k forme linéaire non nulle de E et $\bigcap_{k=1}^p \operatorname{Ker} \varphi_k = F$. Ainsi

Il existe $H_1, \dots, H_p$ hyperplans de E tels que $F = \bigcap_{k=1}^p H_k$.

Variante : On peut aussi écrire $H_k = \operatorname{Vect}(\varepsilon_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k\}}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 13 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. On note

$$G = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$$

Vérifier que G est un sev de $\mathcal{L}(E)$ puis déterminer $\dim G$.

Corrigé : L'ensemble G est clairement un sev de $\mathcal{L}(E)$. Soit $g \in G$. On a

$$\text{Im } f \subset \text{Ker } g \quad \text{et} \quad \text{Im } g \subset \text{Ker } f$$

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Im } f$ que l'on complète en $\mathcal{B}$ une base de E . Soit $\mathcal{B}'_1$ une base de $\text{Ker } f$ que l'on complète en $\mathcal{B}'$ une base de E . Pour $g \in G$, on a la matrice par blocs

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} g = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$$

où $n = \dim E$ et $r = \text{rg } f$. Réciproquement, pour $A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, on peut considérer g dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est donnée par $\left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ et on vérifie sans difficulté que $g \in G$. Ainsi, l'ensemble G est isomorphe à $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ et on conclut

$$\boxed{\dim G = (\dim E - \text{rg } f)^2}$$

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad N_k = \text{Ker } f^k \quad I_k = \text{Im } f^k$$

1. Montrer que les suites $(I_k)_k$ et $(N_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $E = I_r \oplus N_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & N \end{array} \right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.

Corrigé : 1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. On a

$$f^k(x) = 0_E \implies f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = 0_E \quad \text{et} \quad y = f^{k+1}(x) \implies y = f^k(f(x))$$

$$\text{D'où} \quad \text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1} \quad \text{et} \quad \text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (N_k)_k \text{ croît et la suite } (I_k)_k \text{ décroît.}}$$

Il s'ensuit que la suite $(\dim N_k)_k$ et $(\dim I_k)_k$ sont respectivement croissantes et décroissantes. Comme $(\dim I_k)_k$ est décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est stationnaire à partir d'un certain rang et d'après le théorème du rang, la suite $(\dim N_k)_k$ est stationnaire à partir du même rang. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\text{Les suites } (I_k)_k \text{ et } (N_k)_k \text{ sont simultanément stationnaires.}}$$

Remarque : On peut établir un résultat plus précis : la stricte monotonie de ces suites avant la stationnarité. En effet, supposons qu'il existe $\ell < r$ tel que $N_\ell = N_{\ell+1}$. On établit alors par récurrence $N_k = N_{k+1}$ pour tout $k \geq \ell$. En effet, soit $x \in N_{k+2}$, alors $f(x) \in N_{k+1} = N_k$ d'où $x \in N_{k+1}$. On en déduit que la suite $(N_k)_k$ stationne à partir de ℓ avec $\ell < r$ ce qui est absurde.

2. Soit $x \in I_r \cap N_r$. On a

$$f^r(x) = 0_E \quad \text{et} \quad x = f^r(t) \quad \text{avec} \quad t \in E$$

Par suite, on a $f^r(x) = f^{2r}(t) = 0_E$ d'où $t \in N_{2r}$. Or la suite $(N_k)_k$ stationne à partir de r d'où $N_{2r} = N_r$ et par conséquent $t \in N_r$ et donc $x = f^r(t) = 0_E$. Le théorème du rang donne

$$\dim I_r + \dim N_r = \dim E$$

On conclut

$$\boxed{E = I_r \oplus N_r}$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A . Si la matrice A est inversible, le résultat est immédiat avec une matrice N vide. On suppose A non inversible d'où $r \geq 1$. Les sous-espaces I_r et N_r sont clairement stables par f . Notant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_I \uplus \mathcal{B}_N$ une base adaptée à la somme directe $E = I_r \oplus N_r$, on en déduit la forme diagonale par blocs de $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$. Notons respectivement f_{I_r} et f_{N_r} les endomorphismes induits par f respectivement sur I_r et N_r . On a clairement $(f_{N_r})^r = 0$ d'où $N = \text{mat}_{\mathcal{B}_N} f_{N_r}$ matrice nilpotente. Puis

$$\text{Ker } f_{I_r} = N_1 \cap I_r \subset N_r \cap I_r = \{0_E\}$$

D'où f_{I_r} injectif et donc bijectif. On peut aussi rédiger $f_{I_r}(I_r) = I_r$ par stationnarité d'où la surjectivité et donc la bijectivité. Ainsi, la matrice $C = \text{mat}_{\mathcal{B}_I} f_{I_r}$ est inversible et comme A et $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$ sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases éventuellement distinctes, on conclut

$$\boxed{A \text{ semblable à } \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & N \end{array} \right) \text{ avec } C \text{ inversible et } N \text{ nilpotente}}$$