

Feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } A = 1$ et $\text{Tr}(A) = 0$. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$.

Corrigé : On a $A^2 = \text{Tr}(A)A$ (résultat à savoir redémontrer) d'où $A^2 = 0$. Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à A . D'après le théorème du rang, on a $\dim \text{Ker } u = n - 1$. Soit $\varepsilon_1 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\text{Vect}(\varepsilon_1) = \text{Im } u$. Il existe $\varepsilon_n \in E$ tel que $u(\varepsilon_n) = \varepsilon_1$ d'où $u(\varepsilon_1) = u^2(\varepsilon_n) = 0_E$. On complète ensuite (ε_1) en $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ base de $\text{Ker } u$. La famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ ainsi construite est libre. En effet, soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i = 0_E$. On applique u et il vient $\alpha_n \varepsilon_1 = 0_E$ d'où $\alpha_n = 0$ puis la nullité des autres α_i par liberté de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$. La famille $\mathcal{B}$ est libre, de cardinal égal à $\dim E$ ce qui en fait donc une base et on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = E_{1,n}$. On conclut

Les matrices A et $E_{1,n}$ sont semblables.

Exercice 2 (**)

Soit n entier non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$$

Vérifier que les F_i sont des sev de E et montrer que $E = \bigoplus_{i=0}^n F_i$.

Corrigé : On note $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ la famille des polynômes de Lagrange associés à $0, 1, \dots, n$. Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On a

$$P \in F_i \iff \prod_{j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - j) \mid P \iff L_i \mid P$$

Comme $\deg P \leq n$, on en déduit $F_i = \text{Vect}(L_i)$. Puis, pour $P \in E$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(i)L_i$ par interpolation ce qui prouve $E = \sum_{i=0}^n F_i$. Enfin, pour $(P_i)_{0 \leq i \leq n} \in \prod_{i=0}^n F_i$ tel que $\sum_{i=0}^n P_i = 0$, il vient pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\sum_{i=0}^n P_i(j) = P_j(j) = 0$$

et le polynôme P_j admet donc $n + 1$ racines distinctes ce qui prouve $P_j = 0$. On conclut

Les F_i sont des sev de E et $E = \bigoplus_{i=0}^n F_i$.

Exercice 3 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à B avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Supposons le problème résolu. Notant $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A, il existe une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $u(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i-1}$ pour $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et $u(\varepsilon_1) = 0$, autrement dit $\varepsilon_i = u^{n-i}(\varepsilon_n)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Il suffit alors de choisir $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $(u^{n-1}(x), \dots, x)$ est libre. En effet, soit $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = 0_E$. On suppose les α_k non tous nuls et on pose $p = \min \{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_k \neq 0\}$. On a

$$u^{n-p-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) \right) = \alpha_p u^{n-1}(x) + 0_E = 0 \implies \alpha_p = 0$$

ce qui est en contradiction avec le choix de p . Enfin, dans cette base, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ a la forme souhaitée.

Les matrices A et B sont semblables.

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E. On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Corrigé : 1. On vérifie sans difficulté que $\text{id} \in \mathcal{C}(u)$, $\mathcal{C}(u)$ sev de $\mathcal{L}(E)$ et $v \circ w \in \mathcal{C}(u)$ pour v, w dans $\mathcal{C}(u)$. Ainsi

L'ensemble $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2. On a clairement $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset \mathcal{C}(u)$. Réciproquement, soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Le vecteur $v(x_0)$ se décompose dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ en

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

Soit $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Comme v commute avec u , alors v commute avec u^i pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ puis

$$\begin{aligned} v(u^i(x_0)) &= u^i \circ v(x_0) = u^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \right) \\ &= u^i \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (u^i(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ et sont donc égaux ce qui prouve l'inclusion directe. On conclut

$$\mathcal{C}(u) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k, (a_i)_{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Variante : Soit $x \in E$. Il existe $(b_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} v(x) &= v\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k v \circ u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \circ v(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x_0) \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} a_\ell b_k u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x) \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est génératrice de $\mathcal{C}(u)$. Montrons sa liberté.

Soit $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{k-1} = 0$. En particulier, en évaluant en x_0 , il vient

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$. Or la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E donc libre et par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0 \implies \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad a_k = 0$$

Ainsi, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est libre et génératrice de $\mathcal{C}(u)$ donc est une base de $\mathcal{C}(u)$. Son cardinal étant égal à n , on conclut

$$\dim \mathcal{C}(u) = n$$

Exercice 5 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul et $(A, B) \in E^2$. On pose

$$\forall M \in E \quad \Phi(M) = AM - MB$$

1. Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer $\forall (M, p) \in E \times \mathbb{N} \quad \Phi^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} M B^k$

3. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors Φ l'est aussi.

Corrigé : 1. L'application Φ est valeurs dans E par définition des opérations matricielles et par linéarité du produit à gauche et à droite et de la somme, on conclut

$$\Phi \in \mathcal{L}(E)$$

2. On pose $f(M) = AM$ et $g(M) = MB$ pour tout $M \in E$. Les applications f et g sont également des endomorphismes de E et on observe

$$\forall M \in E \quad f \circ g(M) = AMB = g \circ f(M)$$

autrement dit f et g commutent. D'après la formule du binôme, on a

$$\Phi^p = (f - g)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k f^{p-k} \circ g^k$$

Ainsi

$$\forall (M, p) \in E \times \mathbb{N} \quad \Phi^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} M B^k$$

3. Si $A^p = 0$ et $B^q = 0$, alors pour $k \in \llbracket 0; p+q \rrbracket$, on a $k \geq p$ ou $p+q-k \geq q$ d'où $\Phi^{p+q} = 0$. On conclut

$$\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont nilpotentes, alors } \Phi \text{ l'est aussi.}$$

Exercice 6 (***)

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Corrigé : 1. Considérons $x \neq 0_E$. On a $(x, f(x))$ liée d'où l'existence d'un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Soit $y \in E$ tel que (x, y) libre. On a $y \neq 0_E$ et $x + y \neq 0_E$ par liberté et aussi

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y \implies \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$$

Soit $y \in E$ non nul colinéaire à x . On a $y = \alpha x$ avec α scalaire non nul et

$$f(y) = \lambda_y \alpha x = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x \implies \lambda_y = \lambda_x$$

Ainsi, le scalaire λ_x ne dépend pas du choix de x non nul et pour $x = 0_E$, le résultat vaut aussi d'où

$$\boxed{f \in \text{Vect}(\text{id})}$$

2. On procède par récurrence en supposant le résultat vrai pour une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Si A est nulle, le résultat est trivial. On suppose $A \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A . On a $f \notin \text{Vect}(\text{id})$. Sinon, on aurait $\text{Tr}(f) = n\lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ donc $f = 0$ ce qui est exclu. D'après ce qui précède, il existe $x \in E$ non nul tel que $(x, f(x))$ libre. En complétant en $\mathcal{B}$ une base de E , on a

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline U & A' \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A') = 0$ avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ de trace nulle. Donc, il existe $P \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $B = PA'P^{-1}$.

Posant $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right)$, on a Q inversible avec $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right)$ et un produit par blocs donne

$$QMQ^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline U & A' \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LP^{-1} \\ \hline PU & PA'P^{-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LP^{-1} \\ \hline PU & B \end{array} \right)$$

qui est de diagonale nulle ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\text{Une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.}}$$

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul.

1. Soient u, v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer

$$\text{rg}(v) - \text{rg}(u \circ v) \leq \dim \text{Ker } u$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p .

(a) Montrer que la suite $(\text{Ker } u^k)_k$ croît strictement puis stationne.

(b) Établir $\frac{n}{p} \leq \dim \text{Ker } u \leq n - p + 1$

Corrigé : 1. En appliquant le théorème du rang à $u|_{\text{Im } v}$, il vient

$$\text{rg}(v) = \text{rg}(u \circ v) + \dim \text{Ker } u \cap \text{Im } v$$

D'où

$$\boxed{\text{rg}(v) - \text{rg}(u \circ v) \leq \dim \text{Ker } u}$$

2.(a) La suite $(\text{Ker } u^k)_k$ est clairement croissante et stationnaire puisque $u^k = 0$ pour tout $k \geq p$. Supposons $\text{Ker } u^\ell = \text{Ker } u^{\ell+1}$ avec $\ell < p$ et notons $\mathcal{P}(k) : \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k \geq \ell$. Si $x \in \text{Ker } u^{k+2}$, on a $u(x) \in \text{Ker } u^{k+1} = \text{Ker } u^k$ d'où $x \in \text{Ker } u^{k+1}$ ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$ vraie. Par conséquent, la suite $(\text{Ker } u^k)_k$ stationne à partir de $\ell < p$ et $\text{Ker } u^\ell = \text{Ker } u^p = E$ ce qui est absurde par choix de p , ordre de nilpotence. Ainsi

$$\boxed{\{0_E\} = \text{Ker } u^0 \subsetneq \text{Ker } u \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker } u^p = E}$$

2.(b) D'après le résultat de la question 1, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{rg}(u^k) - \text{rg}(u^{k+1}) \leq \dim \text{Ker } u$$

Par sommation télescopique, on trouve

$$\sum_{k=0}^{p-1} [\text{rg}(u^k) - \text{rg}(u^{k+1})] = \text{rg}(u^0) - \text{rg}(u^p) = \text{rg}(\text{id}) = n \leq p \dim \text{Ker } u$$

et
$$\sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{[\dim \text{Ker } u^{k+1} - \dim \text{Ker } u^k]}_{\geq 1} = \dim \text{Ker } u^p - \dim \text{Ker } u = n - \dim \text{Ker } u \geq p - 1$$

On conclut

$$\boxed{\frac{n}{p} \leq \dim \text{Ker } u \leq n - p + 1}$$

Remarque : On peut aussi formuler ce résultat comme un encadrement liant rang d'un endomorphisme nilpotent avec son ordre de nilpotence

$$p - 1 \leq \text{rg}(u) \leq n \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer
$$\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim E$$

2. Montrer
$$2 \text{rg}(f^2) \leq \text{rg}(f)$$

Corrigé : 1. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker } f$$

Or
$$f^3 = 0 \iff f \circ f^2 = 0 \iff \text{Im } f^2 \subset \text{Ker } f$$

d'où
$$\text{rg}(f^2) \leq \dim \text{Ker } f$$

Ainsi

$$\boxed{\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim E}$$

2. On a
$$\text{Im } f|_{\text{Im } f} = \{f(x), x \in \text{Im } f\} = \{f^2(t), t \in E\} = \text{Im } f^2$$

et
$$\text{Ker } f|_{\text{Im } f} = \{x \in \text{Im } f \mid f(x) = 0\} = \text{Ker } f \cap \text{Im } f$$

D'après le théorème du rang appliqué à $f|_{\text{Im } f}$, on a

$$\dim \text{Im } f = \text{rg}(f|_{\text{Im } f}) + \dim \text{Ker } f|_{\text{Im } f} = \text{rg}(f^2) + \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f$$

et

$$\text{Im } f^2 \subset \text{Ker } f \cap \text{Im } f$$

D'où

$$\boxed{2 \text{rg}(f^2) \leq \text{rg}(f)}$$

Exercice 9 (***)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$.

1. On suppose $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > R_i$ avec $R_i = \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$

Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,i} = 3$ et $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geq 2$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Montrer que la matrice A est inversible.

Corrigé : 1. Une telle matrice est dite à *diagonale dominante stricte*. Supposons A non inversible.

On dispose de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ telle que $AX = 0$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec les $x_i \in \mathbb{K}$.

Comme $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, on dispose de $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_i| > 0$$

Si ce maximum était nul, toutes les coordonnées de X seraient nulles ce qui contredirait l'hypothèse X non nulle. Par ailleurs, la i_0 -ème ligne de AX est nulle donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0 &\iff a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j} x_j = 0 \\ &\iff |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j} \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \end{aligned}$$

la division par $|x_{i_0}|$ étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_i|$, il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right|}_{\leq 1} \leq \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A . Ainsi

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX = 0 \implies X = 0$$

d'où

$$\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Remarque : Ce résultat est souvent référencé sous l'intitulé *lemme d'Hadamard*.

2. La matrice proposée est à diagonale dominante stricte. Ainsi

$$\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Exercice 10 (***)

Déterminer les sev stables pour l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

Corrigé : Les sev $\{0\}$, $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont clairement stables par D . Montrons que ce sont les seuls. Soit F un sev de $\mathbb{K}[X]$ stable par D avec $F \neq \{0\}$. Supposons que $\{\deg P, P \in F \setminus \{0\}\}$ est majoré et notons n son maximum. Ainsi, on a $F \subset \mathbb{K}_n[X]$. Soit $P \in F$ tel que $n = \deg P$. On a $P^{(k)} \in F$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $(P^{(k)})_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est échelonnée en degré, formée de polynômes non nuls, donc libre. Par conséquent, on a $n+1 \leq \dim F \leq \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ d'où $F = \mathbb{K}_n[X]$. Si $\{\deg P, P \in F \setminus \{0\}\}$ n'est pas majoré, alors pour tout n entier, il existe $P \in F$ tel que $\deg P = p \geq n$ et par suite $F \supset \mathbb{K}_p[X] \supset \mathbb{K}_n[X]$ pour tout n entier d'où $F = \mathbb{K}[X]$. Ainsi

Les sev stable par dérivation sont exactement les $\mathbb{K}_n[X]$ avec n entier, $\{0\}$ et $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 11 (***)

Soient f, g des projecteurs non nuls de E un $\mathbb{K}$ -ev tels que

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mid f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$$

On suppose $(\lambda, \mu) \notin \{0, 1\}^2$.

1. Montrer que $\text{Im } f \circ g \subset \text{Im } g$ et que $\text{Im } f \subset \text{Im } g$.
2. Établir que $\lambda + \mu = 0$ puis $f \circ g = f$.
3. En déduire $f = g$.

Corrigé : 1. En composant par g à droite la relation puis en isolant $f \circ g$, on obtient

$$f \circ g = \frac{1}{1 - \lambda} [g \circ f \circ g + \mu g]$$

D'où

$$\text{Im } f \circ g \subset \text{Im } g$$

Puis

$$f = \frac{1}{\lambda} [f \circ g - g \circ f - \mu g]$$

Et par conséquent

$$\text{Im } f \subset \text{Im } g$$

2. On a

$$\text{Im } f \subset \text{Im } g = \text{Ker}(\text{id} - g) \implies g \circ f = f$$

Puis

$$f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g \iff f \circ g - f = \lambda f + \mu g$$

En composant par f à droite, on obtient

$$f \circ g \circ f - f = \lambda f + \mu g \circ f \iff f \circ f - f = 0 = (\lambda + \mu)f$$

D'où

$$\lambda + \mu = 0$$

Puis

$$f \circ g - \mu g = (1 + \lambda)f = (1 - \mu)f$$

et en composant par f à gauche, il vient

$$(1 - \mu)f \circ g = (1 - \mu)f$$

Soit

$$f \circ g = f$$

3. Avec les résultats précédents, on a $f \circ g - g \circ f = f - f = 0 = \lambda(f - g)$ d'où

$$f = g$$