

## Préparation à l'interrogation n°07

### 1 Étude asymptotique

1. Développement limité en 0 à l'ordre  $2n + 1$  de  $\operatorname{sh}(x)$  ;
2. Développement limité en 0 à l'ordre  $n$  de  $\ln(1 + x)$  ;
3. Développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $\sqrt{1 + x}$ .

### 2 Croissances comparées

Soient  $\alpha, \beta > 0$ . On a

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad x^\beta e^{-\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

### 3 Contrôle

Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont 1-lipschitziennes sur  $\mathbb{R}$  : elles sont toutes deux dérivables sur  $\mathbb{R}$  avec

$$|\sin'| = |\cos| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\cos'| = |-\sin| \leq 1$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad \text{et} \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$$

### 4 Polynômes

Soit  $n$  entier non nul. On a 
$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

### 5 Réduction

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

1. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u) \\ &\iff \dim E = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff \pi_u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ scindé à racines simples et annulateur de } u \end{aligned}$$

## 6 Séries numériques

1. Comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

## 7 Équation différentielle linéaire

Soient  $a, b$  dans  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$  et  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$ . Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par

$$\forall t \in I \quad x(t) = e^{A(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) \, ds \right) \quad \text{avec} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) \, ds$$

## 8 Trigonométrie

1.  $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2.  $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
3.  $\cos(t)^2 = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$
4.  $\sin(t)^2 = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$

## 9 Exercice type

Déterminer

$$\int \frac{dt}{\cos(t)}$$

**Corrigé :** On a

$$\int \frac{dt}{\cos(t)} = \int \frac{\cos(t)}{1 - \sin(t)^2} \, dt$$

On pose  $u = \sin(t)$  et il vient

$$\int \frac{dt}{\cos(t)} = \int^{\sin(x)} \frac{du}{1 - u^2} = \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \right]^{\sin(x)}$$

D'où

$$\boxed{\int \frac{dt}{\cos(t)} = \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \right| \right)}$$

## 10 Exercice type

Donner un exemple de sev non fermé dans un  $\mathbb{K}$ -ev normé de dimension infinie (voir cours).

## 11 Exercice type

Donner un exemple de partie dont la frontière est d'intérieur non vide (voir cours).

## 12 Questions de cours

Espaces vectoriels normés, topologie (début), graphes usuels.