

Feuille d'exercices n°27

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable, *i.e* telles que $\sum |u_n|^2$ converge. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev normé par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

Corrigé : La suite nulle appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Pour $(u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a clairement $\lambda(u_n)_n = (\lambda u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On utilise le résultat suivant

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \iff (a - b)^2 \geq 0$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |u_n + v_n|^2 \leq (|u_n| + |v_n|)^2 \leq 2(|u_n|^2 + |v_n|^2)$

Comme $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ convergent, il s'ensuit que $\sum (|u_n|^2 + |v_n|^2)$ converge et par comparaison, on a donc $\sum |u_n + v_n|^2$ convergente. Ainsi

L'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ donc un $\mathbb{K}$ -ev.

L'homogénéité et la séparation pour $\|\cdot\|_2$ sont immédiates. Soit N entier. Pour $(u, v) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})^2$, notant $u^N = (u_n \delta_{n \leq N})_n$ et $v^N = (v_n \delta_{n \leq N})_n$, on a

$$\|u^N + v^N\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^N |u_n + v_n|^2}$$

D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}^{N+1}$ muni de la norme deux, il vient

$$\|u^N + v^N\|_2 \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N |u_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^N |v_n|^2} \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Faisant tendre $N \rightarrow +\infty$, l'inégalité triangulaire s'en déduit et on conclut que

L'espace $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ est un espace normé.

Exercice 2 (***)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ muni de

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f'' + 2f' + f\|_{\infty}$$

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer.

Corrigé : L'application N_1 est clairement une norme. Pour l'application N_2 , seul la propriété de séparation n'est pas immédiate. Soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$. Il s'ensuit

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, la fonction nulle est l'unique solution et par suite

Les applications N_1 et N_2 sont des normes.

Remarque : Sans le théorème de Cauchy linéaire, on connaît la forme des solutions $f \in E$ avec

$$N_2(f) = 0 \iff f'' + 2f' + f = 0 \iff f \in \text{Vect}(t \mapsto e^{-t}, t \mapsto te^{-t})$$

Les conditions initiales permettent d'en déduire $f = 0$.

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall f \in E \quad N_2(f) \leq 2N_1(f)$$

Soit $f \in E$ et $g = f'' + 2f' + f$. Posant $h = f' + f$, on trouve $g = h' + h$. Par variation de la constante, on obtient

$$\forall t \in [0; 1] \quad h(t) = e^{-t} \int_0^t g(s) e^s ds \quad \text{et} \quad f(t) = e^{-t} \int_0^t e^s h(s) ds$$

Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\|h\|_\infty \leq \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \leq \|h\|_\infty$$

d'où

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty = N_2(f)$$

Puis

$$\|f'\|_\infty = \|h - f\|_\infty \leq \|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2N_2(f)$$

et

$$\|f''\|_\infty = \|g - 2h + f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + 2\|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 4N_2(f)$$

Ainsi

$$\forall f \in E \quad N_1(f) \leq 7N_2(f)$$

On conclut

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Variante : Soit $f \in E$ et notons $g = f'' + 2f' + f$. On peut considérer cette égalité comme une équation différentielle et chercher à exprimer f en fonction de g . Avec l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$, on trouve le système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, à savoir (φ, ψ) avec $\varphi : t \mapsto e^t$ et $\psi : t \mapsto te^t$. Avec $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, on applique la méthode de variation de la constante sur $\lambda\varphi + \mu\psi$ en résolvant pour t réel

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \iff e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in [0; 1] \quad \lambda(t) = \alpha - \int_0^t se^{-s}g(s) ds \quad \text{et} \quad \mu(t) = \beta + \int_0^t e^{-s}g(s) ds$$

et par suite $\forall t \in [0; 1] \quad f(t) = \alpha e^t + \beta te^t + \int_0^t (t-s)e^{t-s}g(s) ds$

Puis, avec $f = \lambda\varphi + \mu\psi$ et $f' = \underbrace{\lambda'\varphi + \mu'\psi}_{=0} + \lambda\varphi' + \mu\psi'$, on trouve

$$f(0) = f'(0) = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$

Ainsi

$$f = \lambda\varphi + \mu\psi \quad f' = \lambda\varphi' + \mu\psi' \quad f'' = g + \lambda\varphi'' + \mu\psi''$$

avec $\forall t \in [0; 1] \quad \lambda(t) = -\int_0^t s e^{-s} g(s) \, ds \quad \text{et} \quad \mu(t) = \int_0^t e^{-s} g(s) \, ds$

Il existe des constantes $a, b > 0$ tels que $\|\lambda\|_\infty \leq a\|g\|_\infty$ et $\|\mu\|_\infty \leq b\|g\|_\infty$

d'où $\|f\|_\infty \leq (a\|\varphi\|_\infty + b\|\psi\|_\infty)\|g\|_\infty \quad \|f'\|_\infty \leq (a\|\varphi'\|_\infty + b\|\psi'\|_\infty)\|g\|_\infty \quad \dots$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ tel que $N_1(f) \leq C\|g\|_\infty = CN_2(f)$. On conclut comme précédemment.

Exercice 3 (***)

Soient a, b, c et d des réels avec $a < b$ et $c < d$. On pose

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_1(P) = \sup_{t \in [a; b]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [c; d]} |P(t)|$$

Comparer les normes N_1 et N_2 .

Corrigé : Supposons $b > d$. On pose $P_n = (X - m)^n$ pour n entier avec $m = \min(a, c)$. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_1(P_n) = (b - m)^n \quad \text{et} \quad N_2(P_n) = (d - m)^n$$

Par suite
$$\frac{N_1(P_n)}{N_2(P_n)} = \left(\frac{b - m}{d - m} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Supposons $a < c$. On pose $Q_n = (X - M)^n$ pour n entier avec $M = \max(b, d)$. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_1(Q_n) = (M - a)^n \quad \text{et} \quad N_2(Q_n) = (M - c)^n$$

d'où
$$\frac{N_1(Q_n)}{N_2(Q_n)} = \left(\frac{M - a}{M - c} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Les autres cas $d > b$ et $c < a$ s'obtiennent par symétrie des rôles. On conclut

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $[a; b] = [c; d]$.

Supposons $a = c$ et $b > d$. On a

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \sup_{t \in [a; d]} |P(t)| \leq \sup_{t \in [a; b]} |P(t)|$$

autrement dit N_1 est plus fine que N_2 . Les autres situations avec un cas d'égalité entre bornes se traitent de la même manière. Ainsi

Si $a = c$ ou $b = d$, alors il existe une relation de finesse entre N_1 et N_2 .

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé et F un sev de E . Montrer

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$$

Corrigé : Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. Si $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons $\lambda \neq 0$. On a pour $y \in F$

$$\|\lambda x - y\| = |\lambda| \|x - y/\lambda\| \geq |\lambda| \inf_{z \in F} \|x - z\| = |\lambda| d(x, F)$$

Passant à la borne inférieure pour $y \in F$, il vient

$$d(\lambda x, F) \geq |\lambda| d(x, F)$$

puis
$$d(x, F) = d\left(\frac{1}{\lambda} \lambda x, F\right) \geq \frac{1}{|\lambda|} d(\lambda x, F)$$

d'où
$$d(\lambda x, F) \leq |\lambda| d(x, F)$$

On conclut
$$\boxed{\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)}$$

Exercice 5 (****)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$ avec $\text{Sp}(A) \subset D(0, 1)$. Étudier la convergence de la suite $(A^p)_p$.

Corrigé : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A . En considérant $\mathcal{B}_k = (e_1, e_2/k, \dots, e_n/k^{n-1})$ avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de trigonalisation de u et k un entier non nul, on a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u\left(\frac{e_j}{k^{j-1}}\right) = \frac{1}{k^{j-1}} \sum_{i=1}^j \alpha_{i,j} e_i = \lambda_j \frac{e_j}{k^{j-1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_{i,j}}{k^{j-i}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \frac{e_i}{k^{i-1}}$$

où les λ_j désignent les valeurs propres de u . Ainsi, en choisissant k suffisamment grand, on peut trouver une base de trigonalisation de u tel que les termes au dessus-de la diagonale soient inférieurs en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{n}$ avec $\varepsilon > 0$. On fait ce choix de k et on note $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}_k} u$, $X = \text{mat}_{\mathcal{B}_k} x$ et $P = \text{mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}_k$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}_k$. On définit

$$\|A\| = N(P^{-1}AP) = N(A') \quad \text{avec} \quad \forall M \in E \quad N(M) = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|MX\|_\infty$$

Par suite
$$\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a'_{i,j} x_j \right| \leq \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a'_{i,j}|$$

Comme A' est triangulaire et que les termes au dessus de la diagonale sont inférieurs en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{n}$, on a

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

La quantité $\rho(A)$ est appelée *rayon spectral* de A . On a choisi une norme subordonnée pour N d'où

$$\forall (M, N) \in E^2 \quad \|MN\| \leq \|M\| \|N\|$$

Par récurrence immédiate, on a donc $\|A^p\| \leq \|A\|^p$ pour p entier non nul. Comme $\rho(A) \in]0; 1[$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon \in]0; 1[$ et par conséquent

$$0 \leq \|A^p\| \leq \|A\|^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par encadrement, on conclut
$$\boxed{A^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E}$$

Remarque : Il s'agit en fait d'une équivalence. Pour le sens direct, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et X normé (on normalise un vecteur propre) tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, on a $A^p X = \lambda^p X$ pour tout p entier d'où

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |\lambda|^p = \|A^p X\| \leq \|A\|^p \|X\|$$

On a $|\lambda|^p \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ d'où $|\lambda| < 1$.

Variante : Si on dispose de la continuité des applications linéaires en dimension finie, on peut procéder différemment. On dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$$

avec les T_λ triangulaires supérieures strictes. On pose

$$B = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \quad \text{et} \quad N = P \text{diag}(T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P^{-1}$$

Ainsi, on a $A = B + N$ avec B diagonalisable, N nilpotente car semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et un produit par blocs montre $BN = NB$. On note ℓ l'ordre de nilpotence de N . Pour p entier, on obtient avec la formule du binôme

$$A^p = (B + N)^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k$$

On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in D(0, 1)$ puisque ce sont les valeurs propres de A . Pour $\lambda \in D(0, 1)$, on a par croissances comparées

$$\binom{p}{k} \lambda^{p-k} = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit
$$\binom{p}{k} D^{p-k} = \text{diag} \left(\binom{p}{k} \lambda_1^{p-k}, \dots, \binom{p}{k} \lambda_n^{p-k} \right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0_E$$

et pour $k \in \llbracket 0; \ell - 1 \rrbracket$, l'application $M \mapsto PMP^{-1}N^k$ étant linéaire en dimension finie donc continue, il vient

$$\binom{p}{k} B^{p-k} N^k \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0_E$$

d'où

$$A^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0_E$$

Exercice 6 (****)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $g \in E$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)g(x)|$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme.
2. Si pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) \neq 0$, montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la question précédente.

Corrigé : 1. Supposons qu'il existe $] \alpha; \beta[\subset g^{-1}(\{0\})$. Il suffit de prendre $f \in E$ affine par morceaux, non nulle sur $] \alpha; \beta[$ pour avoir $N(f) = 0$ ce qui contredit la séparation. Supposons qu'il n'existe aucun intervalle ouvert dans $g^{-1}(\{0\})$. Soit $f \in E \setminus \{0_E\}$. Il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité de f , il existe $\varepsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $V = [0; 1] \cap]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$. Ainsi, on peut trouver un intervalle ouvert $J \subset V$ et comme $g|_J \neq 0$, alors $fg|_J \neq 0$ et d'où $N(f) > 0$. On conclut

L'application N est une norme si et seulement si $g^{-1}(\{0\})$ ne contient aucun intervalle ouvert.

2. Soit $f \in E$. On a clairement $N(f) \leq \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$. Puis, comme $|fg| \in E$, il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $N(f) = |fg|(x_0) \leq |g(x_0)| \times \|f\|_\infty$. Ainsi

Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

3. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $g(x_0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité de g , on a

$$\exists \eta_n > 0 \quad \forall x \in [0; 1] \quad |x - x_0| \leq \eta_n \implies |g(x)| \leq \frac{1}{n}$$

On définit f_n affine par morceaux avec $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \in [0; 1]$ tel que $|x - x_0| \geq \frac{\eta_n}{2}$. Par construction, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\boxed{N \text{ et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont équivalentes si et seulement si } g^{-1}(\{0\}) = \emptyset.}$$