

Feuille d'exercices n°25

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$$

Exercice 2 (*)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{K})$, $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$ et $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad N(x) = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right| (t) dt$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'application N soit une norme.

Exercice 3 (*)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad N_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis étudier leur équivalence.

Exercice 4 (*)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in E \quad N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5 (**)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad N_2(P) = \sup_{t \in [0; 1]} |P(t)| \quad N_3(P) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

1. Montrer que N_1 , N_2 et N_3 sont des normes.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 6 (**)

On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \forall (n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad S_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R(\theta)^k$$

Étudier la convergence de la suite $(S_n(\theta))_{n \geq 1}$.

Exercice 7 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer si l'une des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité dite de *norme d'algèbre*, à savoir

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

2. On suppose E muni d'une norme $\|\cdot\|$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\| \leq C \|A\| \|B\|$$

Exercice 8 (**)

Soit A partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit N_A sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad N_A(P) = \sup_{t \in A} |P(t)|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N_A soit une norme.

Exercice 9 (**)

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. On pose

$$\forall P \in E \quad \|P\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| \, dt$$

1. Justifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E puis les comparer.
2. Dans E muni de $\|\cdot\|_\infty$, exhiber une suite bornée sans valeur d'adhérence.