

Feuille d'exercices n°26

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que

$$\forall (A, P) \in E \times \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \|A\| = \|P^{-1}AP\|$$

Exercice 2 (**)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$. On définit l'application N sur E par

$$\forall f \in E \quad N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

Montrer que N est une norme puis la comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3 (**)

Soient N_1, N_2 deux normes sur E un $\mathbb{K}$ -ev.

1. On suppose que les boules unités fermées pour les deux normes sont égales. Montrer $N_1 = N_2$.
2. Montrer que le résultat vaut encore s'il s'agit des boules unités ouvertes.

Exercice 4 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la *norme de Frobenius* par $\|A\|_F = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}$ pour $A \in E$. Montrer que $\|\cdot\|_F$ est une norme et qu'elle vérifie

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant l'homogénéité et la séparation. Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble

$$B = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$$

est une partie convexe de E .

Exercice 6 (***)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer entre elles et ensuite avec $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

1. Établir $E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 8 (***)

Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et n un entier non nul. On note

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Montrer $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^n)^2$, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

3. Établir que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
4. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$