

Feuille d'exercices n°27

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable, i.e. telles que $\sum |u_n|^2$ converge. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev normé par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

Indications : Établir $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

pour montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev. Pour l'inégalité triangulaire, se ramener à une configuration dans $\mathbb{K}^{N+1}$ avec N entier muni de la norme deux en posant pour $(u, v) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})^2$, les suites $u^N = (u_n \delta_{n \leq N})_n$ et $v^N = (v_n \delta_{n \leq N})_n$.

Exercice 2 (***)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ muni de

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f'' + 2f' + f\|_{\infty}$$

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer.

Indications : Pour étudier la finesse de N_2 par rapport à N_1 , pour $f \in E$, poser $h = f' + f$ et $g = h' + h$ et procéder par variation de la constante pour trouver une expression de f fonction de h et une expression de h fonction de g . Conclure avec diverses inégalités triangulaires.

Exercice 3 (***)

Soient a, b, c et d des réels avec $a < b$ et $c < d$. On pose

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_1(P) = \sup_{t \in [a; b]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [c; d]} |P(t)|$$

Comparer les normes N_1 et N_2 .

Indications : Supposer $b > d$ puis considérer $P_n = (X - m)^n$ avec $m = \min(a, c)$. Adapter cette idée pour le cas où $a < c$. Conclure en généralisant pour tous les autres cas.

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé et F un sev de E . Montrer

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$$

Indications : Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(x, y) \in E \times F$, observer

$$\|\lambda x - y\| = |\lambda| \|x - y/\lambda\| \geq |\lambda| \inf_{z \in F} \|x - z\|$$

Conclure en suivant une démarche analogue à celle vue pour l'homogénéité de $\|\cdot\|_{\infty}$ sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 5 (****)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$ avec $\text{Sp}(A) \subset D(0, 1)$. Étudier la convergence de la suite $(A^p)_p$.

Indications : Choisir $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de trigonalisation de u canoniquement associé à A puis considérer $\mathcal{B}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2/k, \dots, \varepsilon_n/k^{n-1})$ avec k entier non nul à choisir pour que les termes au dessus de la diagonale de $\text{mat}_{\mathcal{B}_k} u$ soient, en valeur absolue, inférieurs à $\frac{\varepsilon}{n}$ avec $\varepsilon > 0$. Notant $P = \text{mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}_k$, considérer ensuite une norme sur A définie par

$$\|A\| = N(P^{-1}AP) \quad \text{avec} \quad N(M) = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|MX\|_\infty$$

Montrer que ce choix de norme garantit l'inégalité dite de *norme d'algèbre* $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$ pour $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

Exercice 6 (****)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $g \in E$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)g(x)|$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme.
2. Si pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) \neq 0$, montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la question précédente.

Indications : 1. Supposer qu'il existe $]\alpha; \beta[\subset g^{-1}(\{0\})$ et obtenir une contradiction. Puis considérer l'hypothèse contraire.

3. Si $g(x_0) = 0$ avec $x_0 \in [0; 1]$, il existe $\eta_n > 0$ tel que $g(x) \leq \frac{1}{n}$ pour $|x - x_0| \leq \eta_n$.

Construire alors $f_n \in E$ telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) \leq \frac{1}{n}$.