

# EM-1 : Électrostatique

|       |                                                                            |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| I     | Cas d'une charge ponctuelle . . . . .                                      | 3  |
| I.1   | Modèle . . . . .                                                           | 3  |
| I.2   | Champ créé par une charge ponctuelle - loi de Coulomb . . . . .            | 3  |
| I.3   | Champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles . . . . .     | 5  |
| II    | Distribution continue de charges . . . . .                                 | 7  |
| II.1  | Distribution continue de charges . . . . .                                 | 7  |
|       | a) Densité volumique de charges . . . . .                                  | 7  |
|       | b) Densité surfacique de charges . . . . .                                 | 9  |
|       | c) Densité linéique de charges . . . . .                                   | 9  |
| II.2  | Champ créé par une distribution continue de charges . . . . .              | 11 |
| II.3  | Propriétés de symétrie et d'invariances du champ électrostatique . . . . . | 11 |
|       | a) Principe de Curie . . . . .                                             | 11 |
|       | b) Propriétés de symétrie . . . . .                                        | 11 |
|       | c) Invariances . . . . .                                                   | 15 |
| III   | Potentiel électrostatique . . . . .                                        | 15 |
| III.1 | Énergie potentielle électrostatique - Potentiel électrostatique . . . . .  | 15 |
| III.2 | Lien entre $\vec{E}$ et $V$ . . . . .                                      | 17 |
| IV    | Théorème de Gauss . . . . .                                                | 21 |
| IV.1  | Flux du champ électrique . . . . .                                         | 21 |
| IV.2  | Théorème de Gauss . . . . .                                                | 23 |
| IV.3  | Théorème de Gauss pour la gravitation . . . . .                            | 23 |
| IV.4  | Calculs de champ pour des distributions à haut degré de symétrie . . . . . | 23 |
|       | a) Méthode . . . . .                                                       | 23 |
|       | b) Cylindre infini uniformément chargé en volume . . . . .                 | 27 |
|       | c) Sphère uniformément chargée en volume . . . . .                         | 29 |
|       | d) Plan infini uniformément chargé en surface . . . . .                    | 31 |
| V     | Modèle du condensateur plan . . . . .                                      | 33 |
| V.1   | Modèle et champ $\vec{E}$ . . . . .                                        | 33 |
| V.2   | Capacité . . . . .                                                         | 33 |
| V.3   | Aspect énergétique . . . . .                                               | 35 |
| VI    | Lignes de champ et surfaces équipotentielles . . . . .                     | 35 |
| VI.1  | Définitions . . . . .                                                      | 35 |
| VI.2  | Orientation des lignes de champ . . . . .                                  | 37 |
| VI.3  | Orthogonalité des lignes de champ aux surfaces équipotentielles . . . . .  | 37 |
| VI.4  | Évolution du champ le long d'une ligne de champ . . . . .                  | 37 |
| VI.5  | Applications . . . . .                                                     | 39 |



# Chapitre EM-1

## Électrostatique

L'électrostatique étudie le champ électrique créé par des charges fixes dans le référentiel d'étude. Nous verrons que c'est un cas singulier de l'électromagnétisme.

Nous allons dans un premier temps décrire la distribution de charges, puis faire le lien avec le champ électrique et le potentiel. Nous commencerons par le cas d'une charge ponctuelle qui a déjà été traité en MPSI.

### I Cas d'une charge ponctuelle

#### I.1 Modèle

La charge peut exister sous deux formes : soit positive, soit négative. On sait qu'elle est quantifiée, i.e une charge  $q$  est nécessairement un multiple de  $e$  :

$$q = Ze \quad \text{avec} \quad Z \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Par convention la charge d'un électron a été choisie négative, égale à  $-e$ .

#### Définition n°1 Charge ponctuelle

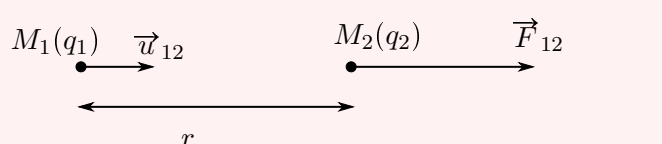
Une particule chargée est assimilable à une charge ponctuelle  $Q$  si son extension spatiale est négligeable devant les distances d'observation.

**Remarque :** Cela signifie qu'on ne regarde pas ce qui se passe à l'intérieur de la particule chargée, par exemple à l'intérieur d'un ion, d'une molécule ou d'un atome.

#### I.2 Champ créé par une charge ponctuelle - loi de Coulomb

#### Définition n°2 Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles  $q_1$  en  $M_1$  et  $q_2$  en  $M_2$ . Elles sont placées dans le vide à la distance  $r$  l'une de l'autre. La force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  s'écrit :

$$\vec{F}_{12}(M_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{12} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$$


**Remarque :** Si  $q_1 q_2 > 0$  la force est répulsive. Elle est attractive le cas échéant.



On définit le champ électrique  $\vec{E}_1$  créé par la charge  $q_1$  en  $M_2$  de telle sorte que

$$\vec{F}_{12}(M_2) = q_2 \vec{E}_1(M_2) \quad \text{donc} \quad \vec{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{12}$$

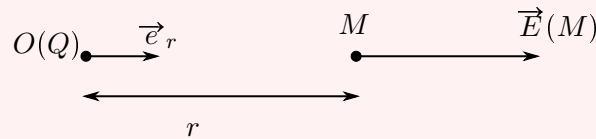
En pratique la charge  $q_1$  crée un champ électrique  $\vec{E}_1(M)$  en tout point  $M$  de l'espace, qu'il y ait une charge ou non en ce point  $M$ . Il est alors naturel d'utiliser les coordonnées sphériques centrées en  $O = M_1$ , là où se trouve la charge créant le champ.

### Définition n°3 Champ créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle  $Q$  placée en  $O$ . Cette charge crée un champ électrique  $\vec{E}(M)$  tel que

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ SI}$$

avec  $M$  repéré en coordonnées sphériques de centre  $O$ .



**Remarque :** On démontrera la relation  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  à partir des équations de Maxwell. Comme  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ SI}$ , et  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ , on en déduit  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ SI}$ .

**Remarque :** Le champ créé par une charge  $Q > 0$  diverge depuis cette charge. Il converge vers la charge si  $Q < 0$ .

### Application n°1 : OG de champ $\vec{E}$ (♥ CE ♥)

1. Déterminer l'ordre de grandeur du champ électrique créé par le noyau sur l'électron dans l'atome d'hydrogène.
2. On appelle champ disruptif de l'air, le champ au-dessus duquel l'air s'ionise. Donner un ordre de grandeur de ce champ.

## I.3 Champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles

### Définition n°4 Principe de superposition et champ résultant

Le principe de superposition stipule que le champ  $\vec{E}(M)$  créé par un ensemble de charges est égal à la somme des champs électriques créés par chacune des charges en l'absence des autres.

Soit  $\mathcal{D}$  un ensemble de charges  $\{P_i(q_i)\}$  alors

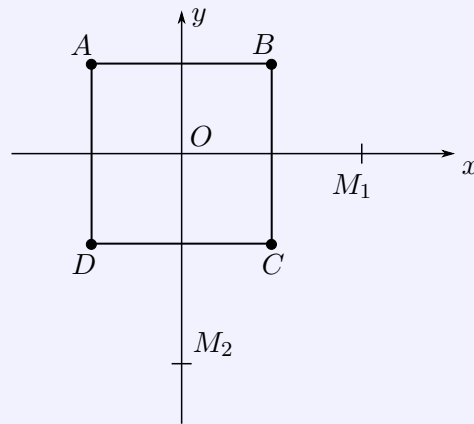
$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M) = \sum_i \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{r,i} \right) \quad \text{avec} \quad r_i = ||\vec{P_i M}|| \quad \text{et} \quad \vec{e}_{r,i} = \frac{\vec{P_i M}}{r_i}$$



**Application n°2 : Charges au sommet d'un carré**

Soient quatre charges identiques  $q > 0$  au sommet d'un carré d'arête  $a$ .

1. Représenter le champ  $\vec{E}(M_1)$  créé par les quatre charges en un point de l'axe  $Ox$  et  $\vec{E}(M_2)$  en un point de l'axe  $Oy$ . Que dire du champ  $\vec{E}(O)$  en  $O$ , centre du carré ?



## II Distribution continue de charges

### II.1 Distribution continue de charges

De manière analogue à l'étude faite en thermodynamique en MPSI, on peut distinguer différentes échelles d'étude : microscopique, mésoscopique et macroscopique.

À l'échelle microscopique, la distribution de charges est discrète, elle est constituée d'un ensemble de charges ponctuelles.

À l'échelle mésoscopique, dans un volume dit élémentaire  $d\tau$ , le nombre de charges est suffisamment important pour que la notion de moyenne ait un sens. Ce volume est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les fluctuations autour de cette valeur moyenne. Ainsi on peut y attribuer une charge élémentaire  $dq$  constante à l'échelle de  $d\tau$ .

À l'échelle macroscopique, on mesure la charge totale  $Q$  dans le volume  $V$  comme étant une intégration de la charge élémentaire  $dq$  sur l'ensemble du volume. On vient donc sommer les charges élémentaires de chaque volume mésoscopique constituant le volume total  $V$ .

#### a) Densité volumique de charges

##### Définition n°5 Densité volumique de charges $\rho$

Soit un volume élémentaire  $d\tau_P$  centré en  $P$  contenant la charge élémentaire  $dq_P$ . On définit la densité volumique de charges

$$\rho(P) = \frac{dq_P}{d\tau_P}$$

$\rho$  s'exprime en  $C\,m^{-3}$ .

**Remarque :** À l'échelle mésoscopique, on n'est pas sensible à la quantification de la charge, car il n'est pas possible de dénombrer les particules à la particule près vu qu'il y en a environ  $10^{10}$  !

**Remarque :** On peut déterminer la charge totale  $Q$  dans un volume  $V$  par intégration :

$$Q = \int_{P \in V} dq_P = \iiint_{P \in V} \rho(P) d\tau_P$$

**Remarque :** Si la distribution de charges est uniforme sur le volume  $V$ , alors

$$\rho(P) = \rho_0 = \text{cste} \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{dq_P}{d\tau_P} \quad \forall P \in V$$



**Application n°3 : OG**

1. Estimer la densité volumique de charge  $\rho$  d'un noyau d'hydrogène.

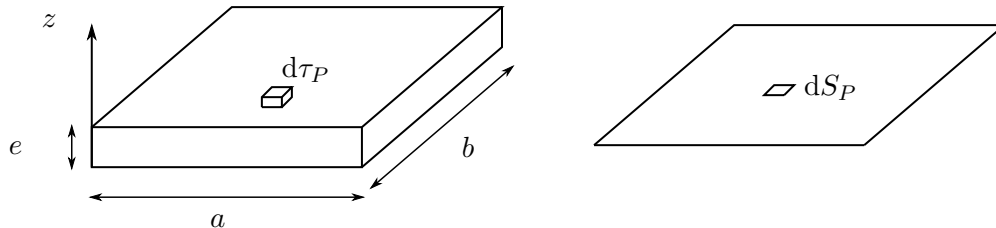
**b) Densité surfacique de charges****Définition n°6** Densité surfacique de charges  $\sigma$ 

Soit une surface élémentaire  $dS_P$  centrée en  $P$  contenant la charge élémentaire  $dq_P$ . On définit la densité surfacique de charges

$$\sigma(P) = \frac{dq_P}{dS_P}$$

$\sigma$  s'exprime en  $\text{C m}^{-2}$ .

La distribution volumique de charges est la distribution « physiquement réaliste » à l'échelle mésoscopique, échelle à laquelle le milieu est continu. Néanmoins, il peut être pertinent de décrire la distribution de charges par une distribution surfacique de charges. Ceci est possible si la charge se répartit dans un volume dont une dimension est très inférieure aux deux autres. Par exemple un parallélépipède rectangle de section  $S = ab$  et d'épaisseur  $e$ . Si  $e \ll a$  et  $e \ll b$ , alors on peut assimiler le parallélépipède à un plan de surface  $S$ .



Il y a équivalence si la charge totale  $Q$  portée par le volume  $V$  du parallélépipède est la même que celle portée par la surface  $S$  du plan.

**Application n°4 : Lien entre  $\rho$  et  $\sigma$** 

1. Définir la charge totale  $Q$  pour les situations en 3D et 2D. En déduire la relation entre  $\sigma$  et  $\rho$ .
2. Simplifier la relation dans le cas où  $\rho_P = \text{cste}$ .
3. On considère une distribution volumique de charges dont la densité de charges dépend de la coordonnée  $z$  associée à l'épaisseur du parallélépipède :

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) & \text{si } z \in [0, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Interpréter physiquement le coefficient  $\delta$ . Exprimer la densité surfacique de charges  $\sigma$  dans le modèle surfacique. Simplifier ensuite cette expression dans le cas où  $\delta \gg e$ .

**c) Densité linéique de charges****Définition n°7** Densité linéique de charges  $\lambda$ 

Soit une longueur élémentaire  $d\ell_P$  centrée en  $P$  contenant la charge élémentaire  $dq_P$ . On définit la densité linéique de charges

$$\lambda(P) = \frac{dq_P}{d\ell_P}$$

$\lambda$  s'exprime en  $\text{C m}^{-1}$ .



**Remarque :** La distribution linéique de charges n'a pas de réalité physique, c'est une modélisation d'une distribution volumique de charges dans le cas où deux dimensions de la distribution sont négligeables devant la troisième. Par exemple un cylindre de rayon  $R$  faible devant sa longueur  $L$  est modélisable par un segment de longueur  $L$ .

## II.2 Champ créé par une distribution continue de charges

### Définition n°8 Champ $\vec{E}(M)$ créé par une distribution continue

Soit une distribution continue de charges  $\mathcal{D}$ . Chaque élément de  $\mathcal{D}$  centré en  $P$  porte la charge élémentaire  $dq_P$  et crée le champ  $d\vec{E}_P(M)$  :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{dq_P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad r = ||\overrightarrow{PM}|| \quad \text{et} \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{PM}}{r}$$

Par principe de superposition,

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in \mathcal{D}} d\vec{E}_P(M)$$

**Remarque :** Selon la dimension de  $\mathcal{D}$ , l'intégrale sera simple ( $dq_P = \lambda(P)d\ell_P$ ), double ( $dq_P = \sigma(P)dS_P$ ) ou triple ( $dq_P = \rho(P)d\tau_P$ ).

**Remarque :** Le calcul du champ électrique par intégration des champ élémentaires n'est pas ce qui est préconisé dans le programme.

## II.3 Propriétés de symétrie et d'invariances du champ électrostatique

### a) Principe de Curie

#### Définition n°9 Principe de Curie

C'est un principe général énoncé par Pierre Curie au début du XX<sup>ème</sup> siècle qui dit que, dans une expérience de physique, les **effets présentent au moins les symétries des causes**.

Ainsi, en électrostatique, le champ électrostatique a les mêmes propriétés de symétrie et d'invariances que la distribution de charges qui le crée.

### b) Propriétés de symétrie

#### Définition n°10 Plans de symétrie et d'antisymétrie

Soit  $\Pi$  un plan de symétrie de la distribution  $\mathcal{D}$  de charges, alors il s'agit d'un plan de symétrie du champ électrique  $\vec{E}$ .

Soit  $\Pi^*$  un plan de d'antisymétrie de la distribution  $\mathcal{D}$  de charges, alors il s'agit d'un plan de d'antisymétrie du champ électrique  $\vec{E}$ .

Les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution  $\mathcal{D}$  de charges permettent de trouver éventuellement la direction du champ en un point  $M$  :

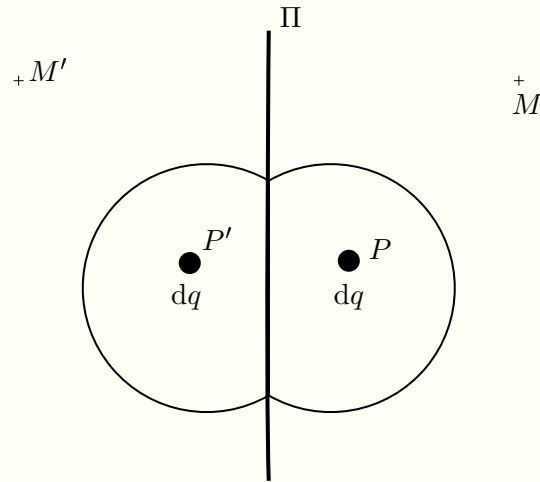
- $\vec{E}(M)$  est contenu dans tous les plans de symétrie de la distribution de charges **contenant** le point  $M$ .
- $\vec{E}(M)$  est orthogonal au plan d'antisymétrie de la distribution de charges **contenant** le point  $M$ .



## Démonstration



Soit une distribution de charges  $\mathcal{D}$  telle que  $\Pi$  soit un plan de symétrie de cette distribution. Considérons  $P' = \text{sym}_{\Pi}P$ , alors  $\rho(P') = \rho(P)$ . On prend un point  $M$  quelconque et on note  $M' = \text{sym}_{\Pi}(M)$  son symétrique par rapport à  $\Pi$ .

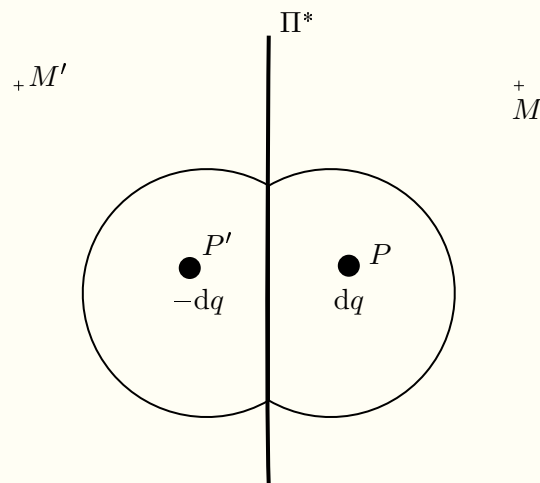


1. Représenter les champs  $d\vec{E}_P(M)$  et  $d\vec{E}_P(M')$  créés par la charge  $dq$  en  $P$  ainsi que les champs  $d\vec{E}_{P'}(M)$  et  $d\vec{E}_{P'}(M')$  créés par la charge  $dq$  en  $P'$ . En déduire les champs résultants  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  créés par la distribution de charge  $\mathcal{D}$ . Conclure.
2. Que peut-on dire du champ  $\vec{E}(M)$  en un point  $M \in \Pi$  ?

## Démonstration



Soit une distribution de charges  $\mathcal{D}$  telle que  $\Pi^*$  soit un plan de d'antisymétrie de cette distribution. Considérons  $P' = \text{sym}_{\Pi^*}P$ , alors  $\rho(P') = -\rho(P)$ . On prend un point  $M$  quelconque et on note  $M' = \text{sym}_{\Pi^*}(M)$  son symétrique par rapport à  $\Pi^*$ .



1. Représenter les champs  $d\vec{E}_P(M)$  et  $d\vec{E}_P(M')$  créés par la charge  $dq$  en  $P$  ainsi que les champs  $d\vec{E}_{P'}(M)$  et  $d\vec{E}_{P'}(M')$  créés par la charge  $-dq$  en  $P'$ . En déduire les champs résultants  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  créés par la distribution de charge  $\mathcal{D}$ . Conclure.
2. Que peut-on dire du champ  $\vec{E}(M)$  en un point  $M \in \Pi^*$  ?



c) Invariances**Définition n°11** Invariances de la distribution de charges et du champ

L'étude des invariances permet de déterminer les coordonnées dont dépendra l'intensité  $E(M)$  du champ  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_M$ , avec  $\vec{u}_M$  un vecteur unitaire.

Si la distribution de charges est invariante par translation selon  $x$ , alors le champ électrique l'est aussi. Donc  $E(M)$  est indépendante de  $x$ .

Si la distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$ , alors le champ électrique l'est aussi. En notant  $\theta$  l'angle lié à cette rotation, alors  $E(M)$  est indépendante de  $\theta$ .

**III Potentiel électrostatique****III.1 Énergie potentielle électrostatique - Potentiel électrostatique**

Rappelons qu'une énergie potentielle est définie pour une force conservative  $\vec{F}$  telle que son travail  $W_{AB}(\vec{F}) = \int_{AB} \delta W(\vec{F})$  ne dépend pas du chemin entre  $A$  et  $B$ . On peut alors écrire :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\ell$$

Pour une force conservative  $\vec{F}$ , on définit une énergie potentielle  $E_p(M)$  telle que

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p}$$

**Remarque :** Le travail  $W_{AB}(\vec{F})$  est alors une différence d'énergie potentielle :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = - \int_A^B dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

**Remarque :** L'énergie potentielle  $E_p(M)$  ne dépend que des coordonnées d'espace du point  $M$ , et elle est définie à une constante près. Donc  $E_p(M)$  est indépendante du référentiel d'étude.

**Définition n°12** Potentiel électrique

Le potentiel électrique en un point  $M$  de l'espace est lié à l'énergie potentielle de la force électrique  $\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$  s'exerçant sur la charge  $q$  que l'on pourrait mettre en  $M$  :

$$\boxed{E_p(M) = qV(M)}$$

**Définition n°13** Cas d'un champ créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle  $Q$  placée en  $O$  créant un champ électrique  $\vec{E}(M)$ . La force exercée par cette charge sur une autre  $q$  placée en  $M$  s'écrit

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M) \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r} \quad \text{et} \quad r = ||\overrightarrow{OM}||$$

L'énergie potentielle de cette force est

$$\boxed{E_p(M) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}}$$

Le potentiel électrique créé par la charge  $Q$  s'écrit alors

$$\boxed{V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}}$$



**Remarque :** Le potentiel est défini à une constante près. Classiquement, pour une distribution de charges de **dimension finie**, on fixe l'origine du potentiel électrique à l'infini.

**Remarque :** On peut vérifier que l'interaction est attractive si  $E_p(r)$  est une fonction croissante, soit  $qQ < 0$ . Ce qui est cohérent avec  $\vec{F} \cdot \vec{e}_r < 0$ .

#### Définition n°14 Potentiel créé par une distribution discrète de charges

Soit une distribution  $\mathcal{D}$  discrète de charges  $\{P_i(q_i)\}$ . D'après le principe de superposition, le potentiel  $V(M)$  créé par cette distribution s'écrit :

$$V(M) = \sum_i V_{P_i}(M) = \sum_i \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} \right) + \text{cste}$$

**Remarque :** Dans le cas d'une distribution continue de charges, on posera une intégrale :

$$V(M) = \int_{P \in \mathcal{D}} \left( \frac{dq_P}{4\pi\epsilon_0 P M} \right) + \text{cste}$$

#### Application n°5 : Charges identiques au sommet d'un carré



On reprend l'exercice avec quatre charges identiques  $q$  au sommet d'un carré d'arête  $a$ .

1. Déterminer le potentiel  $V(O)$  au centre  $O$  du carré. On choisira l'origine du potentiel à l'infini.

### III.2 Lien entre $\vec{E}$ et $V$

#### Définition n°15 Forme intégrée : circulation

La circulation du champ électrostatique, le long d'une courbe orientée est égale à la diminution du potentiel électrostatique :

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B) = -\Delta V$$

La circulation du champ électrique ne dépendant uniquement du point de départ  $A$  et de celui d'arrivée, sa circulation sur un contour fermé est nulle :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

#### Définition n°16 Forme locale : gradient

L'équation locale entre le champ électrostatique et le potentiel est :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ .  
L'opération gradient en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \vec{\nabla}V \quad \text{avec} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

**Remarque :** Attention, l'opérateur nabla  $\vec{\nabla}$  n'a d'existence qu'en coordonnées cartésiennes.



## Démonstration

On note  $\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$  la force électrique créée par une distribution de charges  $\mathcal{D}$  sur la charge  $q$  placée en  $M$

1. À partir de la relation entre énergie potentielle et force, établir l'équation locale.
2. En déduire la forme intégrée.
3. Que peut-on dire de la circulation du champ électrique sur un contour fermé ?

**Remarque :** Le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.

**Remarque :** D'après le programme seul le gradient en coordonnées cartésiennes est exigible, néanmoins il est impératif de connaître son expression en coordonnées cylindriques :

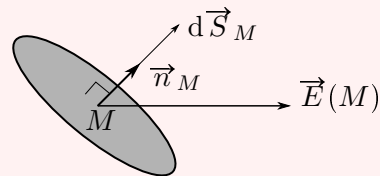
$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

## IV Théorème de Gauss

### IV.1 Flux du champ électrique

#### Définition n°17 Flux élémentaire

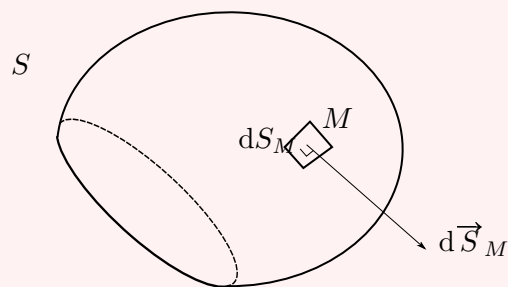
Soit  $d\phi_M$  le flux du champ électrique  $\vec{E}(M)$  à travers une surface élémentaire  $dS_M$  centrée en  $M$  et orientée selon  $\vec{n}_M$ . Le vecteur  $\vec{n}_M$  est le vecteur unitaire normale à  $dS_M$  dont le sens oriente la surface.



#### Définition n°18 Flux à travers une surface orientée

Soit une surface  $S$  orientée. Le flux du champ électrique s'écrit

$$\phi = \iint_{M \in S} d\phi_M = \iint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

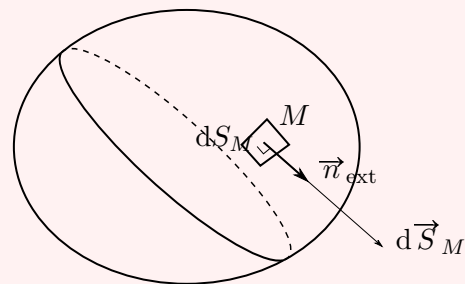


#### Définition n°19 Flux à travers une surface fermée

Soit une surface fermée  $S$ , i.e. une surface définissant un volume intérieur. Par convention, le flux à travers  $S$  cette surface correspond au **flux sortant** :

$$\phi = \oiint_{M \in S} d\phi_M = \oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

$$\text{avec } d\vec{S}_M = dS_M \vec{n}_{\text{ext}}$$



On peut citer comme surface fermée une sphère ou encore un cylindre fermé à ses deux extrémités par des disques.



## IV.2 Théorème de Gauss

### Définition n°20 Énoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique à travers une **surface fermée** (appelée surface de Gauss) est égal au rapport de la charge intérieure sur la permittivité du milieu :

$$\oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS_M = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon}$$

Si le milieu est le vide alors  $\epsilon = \epsilon_0$ .

**Remarque :** La charge intérieure est la charge totale dans le volume  $V$  défini par la surface fermée.

**Remarque :** Le théorème de Gauss lie le champ en un point  $M$  de la surface de Gauss aux charges qui créent ce champ. Seules les charges intérieures influent sur  $\vec{E}(M)$ . Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de charges à l'extérieur de la surface de Gauss, mais que leur effet s'annule en  $M$ .

Le théorème de Gauss est ici admis. C'est un théorème utile pour déterminer le champ en tout point de l'espace dans le cas d'une distribution de charges dite à haut degré de symétrie. En effet, il faut avoir des informations sur la direction du champ électrostatique ainsi que les coordonnées dont dépend sa norme afin de choisir une surface de Gauss « judicieuse » pour pouvoir expliciter le flux. Nous verrons trois situations à maîtriser : les distributions de charges sphérique, cylindrique et plane.

## IV.3 Théorème de Gauss pour la gravitation

Les forces gravitationnelle et électrostatique sont des forces newtoniennes de forme  $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ . On peut donc construire un tableau d'analogie sur la force, l'énergie potentielle mais aussi le théorème de Gauss.

| Interaction électrostatique                                                                      |                                                                                | Interaction gravitationnelle                                                                             |                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| Force de Coulomb                                                                                 | $\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ | Force de Newton                                                                                          | $\vec{F}_{\text{grav}} = -\mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ |
| Charge                                                                                           | $q$                                                                            | Masse                                                                                                    | $m$                                                                  |
| Constante                                                                                        | $\frac{1}{\epsilon_0}$                                                         | Constante                                                                                                | $-4\pi\mathcal{G}$                                                   |
| Champ électrique                                                                                 | $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$                     | Champ gravitationnelle                                                                                   | $\vec{\mathcal{G}} = -\mathcal{G} m \frac{\vec{e}_r}{r^2}$           |
| Énergie potentielle électrique                                                                   | $E_{p,\text{elec}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$                         | Énergie potentielle gravitationnelle                                                                     | $E_{p,\text{grav}} = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r}$                 |
| Théorème de Gauss électrostatique                                                                |                                                                                | Théorème de Gauss gravitationnel                                                                         |                                                                      |
| $\oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS_M = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ |                                                                                | $\oint_{M \in S} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS_M = -4\pi\mathcal{G} M_{\text{int}}$ |                                                                      |

## IV.4 Calculs de champ pour des distributions à haut degré de symétrie

### a) Méthode

On n'étudiera que des distributions à haut degré de symétrie, c'est-à-dire des distributions dont les symétries sont suffisantes pour déterminer la direction du champ électrostatique en tout point et trouver une surface de Gauss sur laquelle on peut appliquer facilement le théorème de Gauss.

Un problème dit à haut degré de symétrie est un problème pour lequel l'étude des symétries et des invariances permet d'écrire le champ électrostatique ne dépendant que d'une coordonnée d'espace, et de direction selon un vecteur d'une base judicieusement choisie.



La méthode consiste à :

- faire l'étude des symétries et des invariances de la distribution de charges pour en déduire celles de  $\vec{E}(M)$  ;
- choisir une « bonne » surface de Gauss telle que
  - $\vec{E}(M) \cdot \vec{n}_{\text{ext}}$  soit facile à exprimer ( $\vec{E} \perp \vec{n}_{\text{ext}}$  ou  $\vec{E} \parallel \vec{n}_{\text{ext}}$ )
  - l'intensité du champ  $\vec{E}$  soit constante sur la surface d'intégration pour pouvoir être sortie de l'intégrale ;
  - exprimer le flux par intégration, puis la charge intérieure et enfin appliquer le théorème de Gauss.

Si le problème n'est pas à haut degré de symétrie, une méthode possible est de

- déterminer le potentiel  $V(M)$  par intégration sur la distribution de charges

$$V(M) = \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{dq_P}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{PM}||} + \text{cste}$$

- et d'en déduire le champ par

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

#### Application n°6 : Spire circulaire



Soit une spire circulaire d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  uniformément chargée, de densité linéique de charges  $\lambda_0$ .

1. Faire l'étude des symétries et des invariances du problème. Commenter.
2. Déterminer l'expression du potentiel électrique  $V(r=0, z)$  en un point de l'axe ( $Oz$ ). On choisira son origine en  $z \rightarrow +\infty$ .
3. En déduire le champ  $\vec{E}(r=0, z)$  en un point de l'axe ( $Oz$ ).



**b) Cylindre infini uniformément chargé en volume****Application n°7 : Cylindre infini uniformément chargé (♥ CE ♥)**

Soit un cylindre d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R$  et de longueur infinie. Il est chargé uniformément en volume. On note  $\rho$  la densité volumique de charges.

1. Déterminer l'expression du champ  $\vec{E}(M)$  en tout point de l'espace. Le champ est-il continu ?
2. Déterminer l'expression du potentiel électrique  $V(M)$  en tout point de l'espace. Peut-on choisir l'origine du potentiel à l'infini ?



**c) Sphère uniformément chargée en volume****Définition n°21** Analogie avec une charge ponctuelle

Le champ électrostatique créé par une distribution à symétrie sphérique de rayon  $R$  est équivalente en  $r > R$  à celui produit par la charge ponctuelle de charge totale  $Q$  placée en  $O$  :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

**Application n°8 : Sphère uniformément chargée en volume (♥ CE ♥)**

Soit une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  chargée uniformément en volume. On note  $\rho$  la densité volumique de charges.

1. Établir l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.
2. Exprimer la différence de potentiel  $\Delta V = V(2R) - V(R)$  entre deux points  $A$  et  $B$  tels que  $r_A = R$  et  $r_B = 2R$  en fonction de  $\rho$ ,  $R$  et  $\epsilon_0$ .
3. Montrer que le champ électrique pour  $r > R$  est le même que celui créé par une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
4. Montrer que cette propriété reste valable pour toute distribution sphérique même de distribution non uniforme tant qu'on garde les mêmes symétries et invariances sphériques.



**d) Plan infini uniformément chargé en surface****Application n°9 : Champ créé par un plan infini (♥ CE ♥)**

Soit le plan  $(Oxy)$  infini uniformément chargé. On note  $\sigma$  la densité surfacique de charges.

1. Déterminer l'expression du champ électrique en tout point de l'espace en dehors du plan  $(Oxy)$ . Le champ électrique est-il continu ?



## V Modèle du condensateur plan

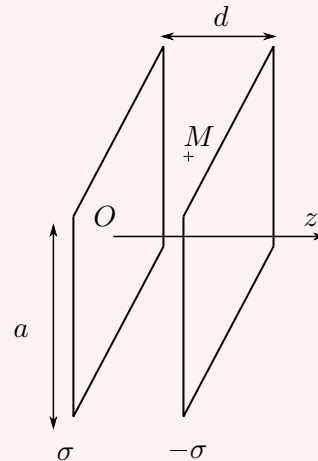
### V.1 Modèle et champ $\vec{E}$

#### Définition n°22 Modèle du condensateur plan

On définit un condensateur plan comme la superposition de deux distributions surfaciques planes de charges opposées. Il faut de plus que les dimensions  $a$  des armatures soient grandes devant la distance  $d$  qui les sépare.

On négligera les effets de bords. Ainsi on peut considérer que l'on conserve les propriétés de symétrie et d'invariance du plan infini, donc  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$ . Le champ est alors nul en dehors du condensateur et dans le condensateur, on a

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si} \quad 0 < z < d$$



**Remarque :** Le modèle sera valable si on regarde en un point  $M$  pas trop proche des bords du condensateur.

#### Démonstration

1. Établir l'expression du champ électrostatique.

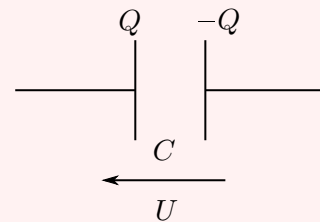
### V.2 Capacité

#### Définition n°23 Capacité du condensateur plan

Par définition, la capacité  $C$  d'un condensateur est telle que  $Q = CU$ .

Pour un condensateur plan constitué d'armatures de surface  $S$  distantes de  $d$  par du vide, la capacité s'exprime

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



**Remarque :** Si l'isolant n'est pas du vide mais un diélectrique de permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$ , la capacité s'écrit

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

**Remarque :** La capacité est d'autant plus grande que  $S$  est grande et que  $d$  est faible.

#### Démonstration

On note  $A$  un point de l'armature de gauche en  $z = 0$  et de charge  $Q = \sigma S$ , et  $B$  un point de l'armature de droite en  $z = d$  et de charge  $-Q = -\sigma S$ .

1. En exprimant la circulation du champ électrique entre  $A$  et  $B$ , établir l'expression de la capacité du condensateur.



### V.3 Aspect énergétique

#### Définition n°24 Énergie emmagasinée et densité volumique d'énergie

Un condensateur chargé sous une tension  $U$  a emmagasiné l'énergie

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$$

D'où la densité volumique d'énergie électrique dans le condensateur

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

**Remarque :** On se place ici dans l'ARQS, i.e. la charge du condensateur de  $q = 0$  à  $Q$  se fait « lentement ».

**Remarque :** L'expression de la densité volumique d'énergie électrique est une expression générale, dans une zone où règne un champ électrique.

#### Démonstration

1. Démontrer l'expression de l'énergie emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge entre  $q = 0$  et  $Q$ .
2. En utilisant l'expression de la capacité du condensateur, en déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électrique  $u_e$ .

## VI Lignes de champ et surfaces équipotentiellles

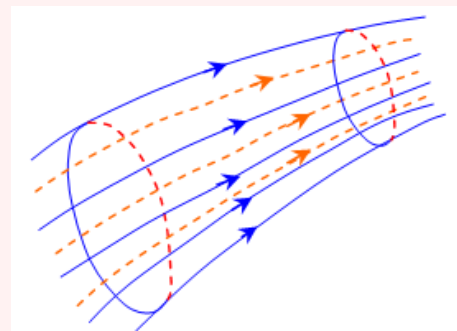
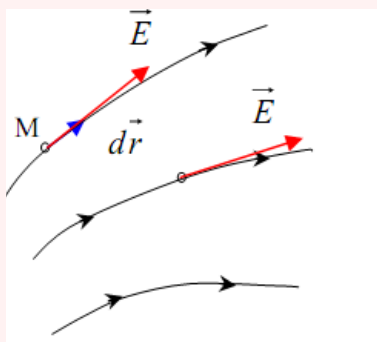
### VI.1 Définitions

#### Définition n°25 Lignes de champ et surfaces équipotentiellles

Les lignes de champ sont les lignes tangentes en chaque point au champ électrostatique. Une ligne de champ est orientée par une flèche indiquant le sens du champ électrostatique.

Un tube de champ est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée.

Une surface équipotentielle est une surface de potentiel électrostatique constant.



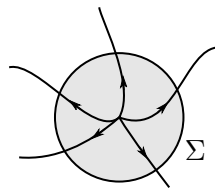


## VI.2 Orientation des lignes de champ

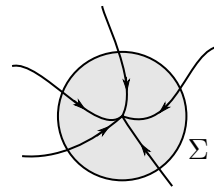
### Définition n°26 Propriétés des lignes de champ

Comme  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ , les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants. Par conséquent une ligne de champ électrostatique ne peut pas se refermer sur elle-même. Si le potentiel est maximal en un point, alors les lignes de champ divergent de ce point. Si le potentiel est minimal en un point, alors les lignes de champ convergent vers ce point.

**Remarque :** Le potentiel électrostatique n'a pas d'extremum dans une région vide de charges. On peut justifier cette remarque par application du théorème de Gauss à une surface de Gauss englobant un point correspondant à un extremum de potentiel.



$$Q_{\text{int}} > 0$$



$$Q_{\text{int}} < 0$$

## VI.3 Orthogonalité des lignes de champ aux surfaces équipotentielles

### Définition n°27 Position des équipotentielles

Les surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ. Les points  $M$  d'une surface équipotentielle sont solution de

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = 0$$

#### Démonstration

1. Démontrer ce résultat à l'aide de la circulation de  $\vec{E}$ .

## VI.4 Évolution du champ le long d'une ligne de champ

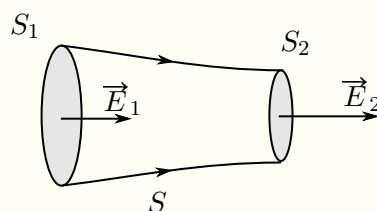
### Définition n°28 Évolution du champ le long d'une ligne de champ

Dans une zone vide de charges, la norme du champ électrique :

- augmente le long d'une ligne de champ dans la direction où les lignes de champ se resserrent ;
- diminue le long d'une ligne de champ dans la direction où les lignes de champ s'écartent.

#### Démonstration

Soit le tube de champ dont la surface totale  $S_{\text{tot}} = S \cup S_1 \cup S_2$  constitue une surface fermée. On suppose que les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont suffisamment faibles pour considérer le champ uniforme sur celles-ci.



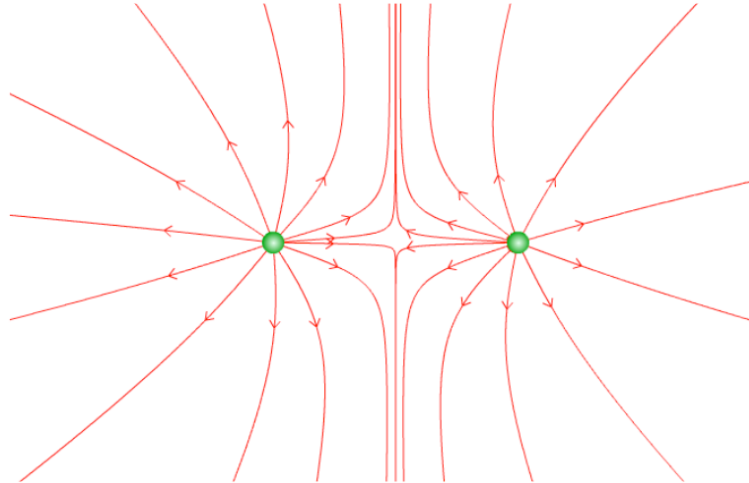
1. Montrer que  $\|\vec{E}_2\| > \|\vec{E}_1\|$ .



## VI.5 Applications

### Exercice 1: Deux charges

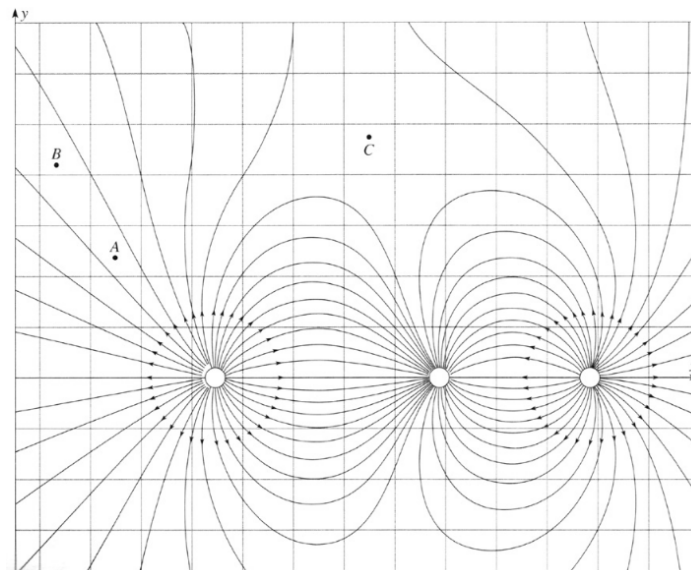
On donne la représentation des lignes de champ électrostatique de deux charges :



1. Préciser le signe des deux charges, ainsi que la valeur du rapport de ces deux charges.
2. Tracer quelques isopotentielle.

### Exercice 2: Topographie

Le schéma représente les lignes du champ électrostatique créé par des fils très longs, uniformément chargés, perpendiculaires au plan de la figure.



1. Où sont situés les points d'intersection des fils avec le plan du schéma ?
2. Quel est le signe de la densité linéique de charge de chacun d'entre eux ?
3. Quel est le signe de la densité linéique de charge totale ?
4. La norme du champ en  $A$  est de  $100 \text{ V.m}^{-1}$ . Calculer une valeur approchée du champ en  $B$ .
5. Que peut-on dire du champ au voisinage de point  $C$  ?