

DM07 : Révision optique (Temps indicatif 2h)**Exercice 1: Interférences lumineuses à 2 ou 3 ondes**

On considère (figure 1) un faisceau de lumière parallèle de longueur d'onde dans l'air λ_m , se propageant dans la direction (Oz) . Ce faisceau arrive sur un écran placé dans le plan $(xOy(z=0))$ percé de deux trous identiques T_1 et T_2 . Les centres des trous O_1 et O_2 ont pour coordonnées respectivement $(\frac{a}{2}, 0, 0)$ et $(-\frac{a}{2}, 0, 0)$.

Le rayon des trous est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Ceci permet de supposer qu'il existe un champ d'interférences qui est la zone commune aux deux faisceaux diffractés par les trous. On modélise chaque trou par une source secondaire ponctuelle émettant une lumière uniforme dans le champ d'interférences. Ces sources secondaires sont cohérentes entre elles.

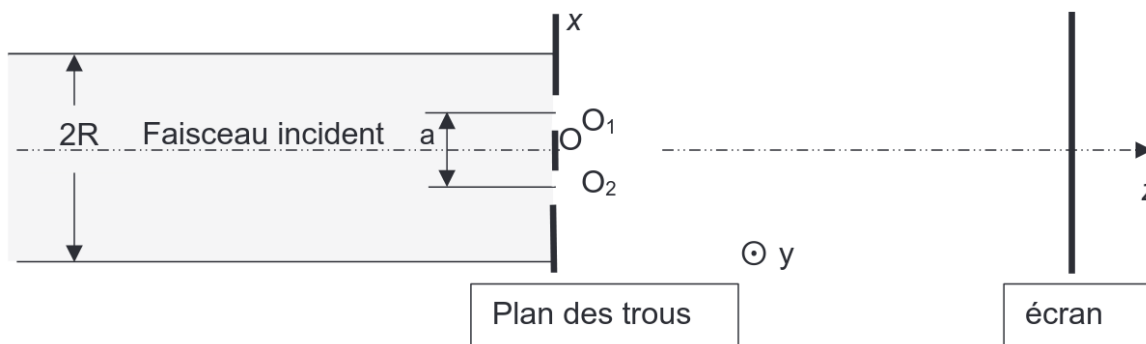
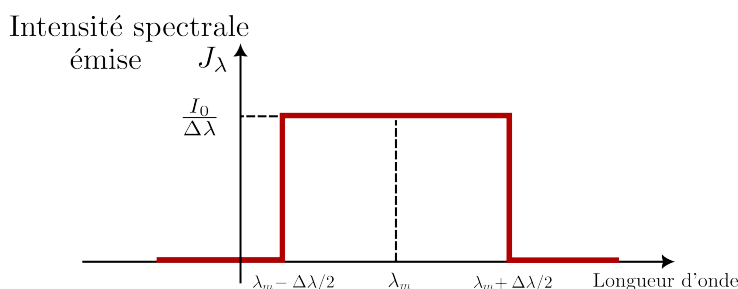


FIGURE 1 – Géométrie du dispositif à deux trous

- On observe sur un écran placé dans le plan $z = D$, en un point M de coordonnées (x, y, D) . On suppose que D est très grand devant $a, |x|$ et $|y|$. Le montage est réalisé dans l'air d'indice $n_{air} = 1,0$.
 - De quel type de division interférentielle s'agit-il ? Les interférences sont-elles localisées ?
 - Établir l'expression de la différence de marche $\delta(M)$. Établir l'expression de l'intensité $I(M)$ au point M en notant I_{max} l'intensité maximale.
- Décrire ce qu'on doit voir sur l'écran et exprimer l'interfrange i en fonction de la longueur d'onde λ et des paramètres géométriques du dispositif.
 - Pourquoi peut-on remplacer les deux trous par deux fentes fines identiques parallèles à (Oy) ? Quel en est l'intérêt ? La figure est-elle transformée si on translate de façon "raisonnable" en bloc les fentes dans leur plan ?

La source est en réalité quasi-monochromatique à profil spectral "rectangulaire" de largeur $\Delta\lambda$ autour de λ_m avec $\Delta\lambda \ll \lambda_m$. Ce profil spectral, en fonction de la longueur d'onde d'émission, est représenté sur la figure 2. On admet que l'intensité émise par une bande spectrale de largeur $d\lambda$ autour de λ vaut $dI = J_\lambda d\lambda$.

FIGURE 2 – Profil "rectangulaire" d'une source quasi-monochromatique Par commodité de représentation, l'échelle n'est pas respectée ($\Delta\lambda \ll \lambda_m$)

- Décrire qualitativement l'influence de l'élargissement spectral de la source sur l'observation des franges sur l'écran.

- (b) En appliquant un critère quantitatif, déterminer l'abscisse x_b de M sur l'écran à partir de laquelle on aura brouillage des franges.
- (c) Comparer $\delta(x_b, \lambda_m) - \delta(x_b, \lambda_m + \Delta\lambda/2)$ à la longueur de cohérence temporelle ℓ_c de la source. Conclure.
- (d) Justifier pourquoi on définit le nombre d'interfranges visibles par $N = \frac{2\ell_c}{\lambda_m}$.
- (e) Dans le tableau ci-dessous sont indiquées des caractéristiques de sources quasi-monochromatiques. Après l'avoir recopié sur votre copie, le compléter et le commenter.

Source	$\lambda_m(nm)$	$\Delta\lambda(nm)$	$\ell_c(m)$	N
Laser He-Ne	632,991	0,001	?	?
Raie rouge de l'hydrogène	656,2	0,1	?	?
Lumière blanche filtrée	500	20	?	?

Dans la suite de cette partie, on considère que la source est rigoureusement monochromatique de longueur d'onde λ .

4. Une troisième fente, identique aux deux autres, parallèle à Oy , est placée en $O(0, 0, 0)$. Le plan des trois fentes est placé orthogonalement à l'axe de révolution commun de deux lentilles minces convergentes de distance focale $f' = 50$ cm. La lumière provient d'une fente source monochromatique, parallèle aux fentes diffractantes, placée au foyer principal objet de la première lentille (lentille d'entrée). L'écran d'observation est confondu avec le plan focal image de la seconde lentille (lentille de sortie), placée en aval du plan percé.
 - (a) Faire une représentation schématique du montage.
 - (b) Représenter les cheminements des trois rayons qui interfèrent en un point M de l'écran.
 - (c) Établir la nouvelle fonction intensité $I(\varphi)$ en posant $\varphi = 2\pi \frac{ax}{\lambda f'}$. On fera figurer l'intensité I_0 qui correspondrait à celle d'une fente unique identique.
 - (d) Représenter, sur un même graphe, la fonction intensité $I(\Delta\varphi)$ pour les deux fentes de la question 2 et la fonction intensité $I(\varphi)$ pour les trois fentes de la question 4 sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
 - (e) Commenter en comparant la luminosité et la largeur des zones les plus brillantes.
 - (f) On donne sur la photo figure 3 ce qu'on voit sur l'écran pour une lumière monochromatique rouge de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm. À partir de cette photo 3, évaluer la distance entre les deux fentes en considérant que seule la zone comprise entre les abscisses $x = 2,1$ mm et $x = -2,1$ mm correspond au calcul de l'intensité tel qu'il a été fait, c'est-à-dire sans tenir compte de la largeur des fentes diffractantes.

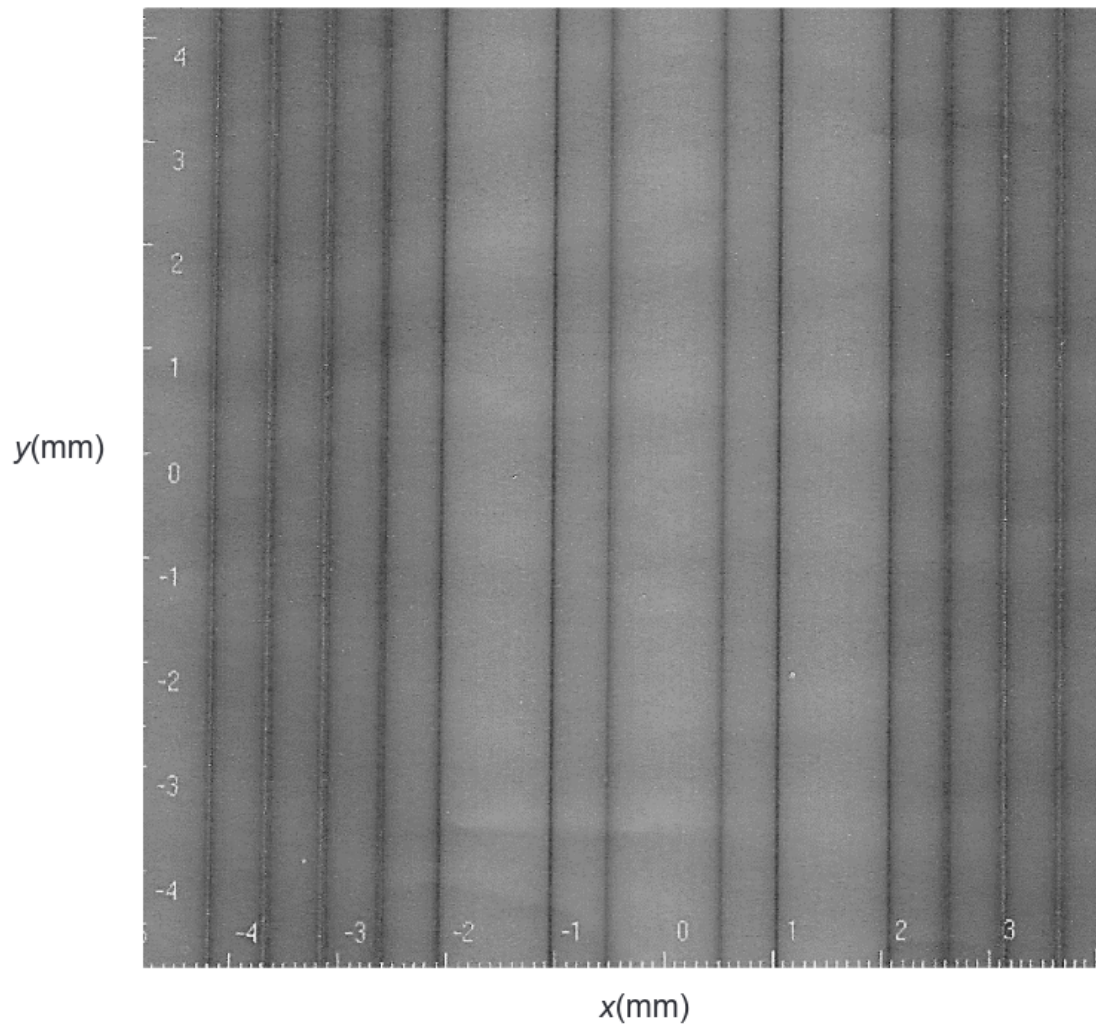


FIGURE 3 – Interférences à 3 fentes, les graduations sont en mm

Exercice 2: Différents aspects de l'écoulement dans une lame de savon

L'étude d'écoulements tourbillonnaires plans, dits aussi bi-dimensionnels, s'applique dans de nombreux domaines, dont les écoulements géophysiques. Parmi ceux-ci, une thématique particulièrement riche est celle des écoulements tourbillonnaires océaniques et atmosphériques de fluide (eau ou air) sur des distances horizontales grandes devant l'épaisseur de la couche de fluide concernée. L'image satellite de la figure 4 présente une allée tourbillonnaire dans le sillage des îles du Cap Vert (image NASA).

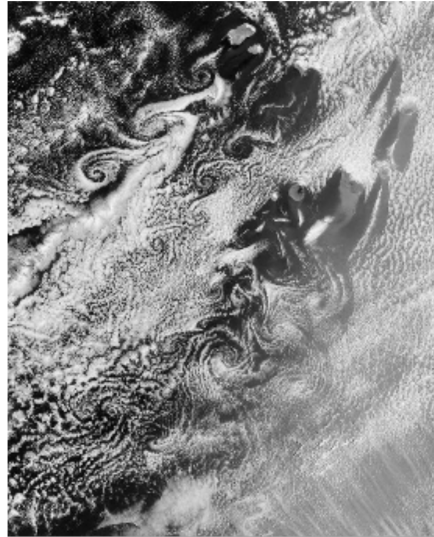


FIGURE 4

Sous certaines conditions, ces écoulements peuvent être modélisés par l'étude des écoulements tourbillonnaires plans dans une lame de savon. On ne s'intéressera qu'à la caractéristique de cette lame de savon.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Des données et relations utiles sont disponibles dans le document réponse.

2.1 Interféromètre de Michelson et épaisseur d'une lame de savon

Le but de cette partie est de quantifier, par l'étude de la figure d'interférence à la surface d'une lame de savon, l'écart que présente celle-ci à un écoulement rigoureusement plan. On procédera par analogie avec la figure d'interférence obtenue à l'aide d'un interféromètre Michelson réglé en coin d'air.

2.1.1

On considère un interféromètre de Michelson dans lequel l'ensemble lame séparatrice + compensatrice est assimilé à une unique lame semi-réfléchissante d'épaisseur négligeable. On la note par la suite lame séparatrice (L).

L'interféromètre, éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 est réglé comme schématisé sur la figure 5 : les deux bras sont dissymétriques du fait de la position relative des miroirs : M_1 est parallèle à (J, x) et M_2 est parallèle à (J, y) mais ils ne sont pas à égale distance de J . On considère que les deux ondes qui émergent de l'interféromètre vers l'espace d'observation ont le même éclairement I_0 .

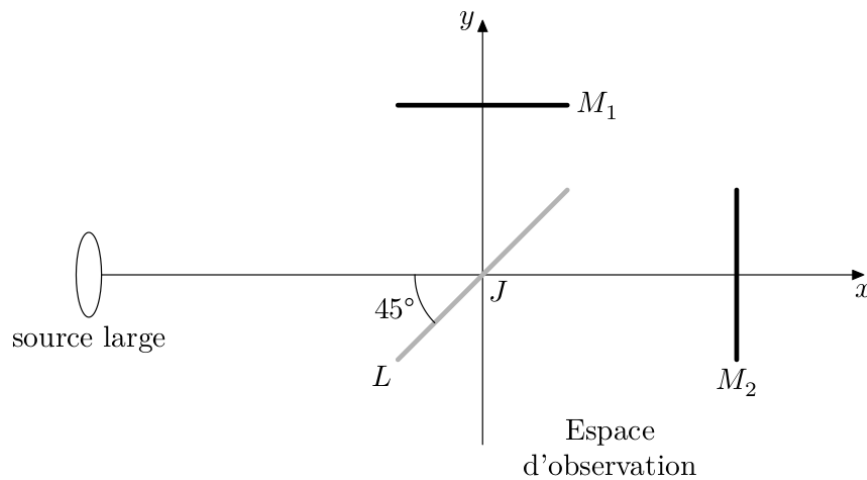


FIGURE 5 – Schéma de l'interféromètre éclairé par une source large

1. Sur la figure A du document réponse page 8, à rendre avec la copie, tracer avec soin les deux rayons issus du rayon incident qui émergent de l'interféromètre dans l'espace d'observation. Sur le même schéma, dans l'espace réservé à cet effet, montrer graphiquement que l'on peut considérer que ces deux rayons sont issus d'une "lame d'air" d'épaisseur e que l'on représentera. On supposera que l'indice de l'air est égal à 1.
2. Établir la différence de marche introduite par le système en fonction de l'angle d'incidence θ sur cette lame et de son épaisseur e .
3. Où est localisée la figure d'interférence ? Comment l'observer dans de bonnes conditions si l'on dispose d'un jeu complet de lentilles convergentes de distances focales comprises entre 20 cm et 1 m ? Un schéma clair de la situation expérimentale correspondante est attendu.
4. Montrer que la figure d'interférence est formée d'anneaux d'égale inclinaison (justifier ce terme). On observe sur l'écran la figure d'interférence présentée figure 6.

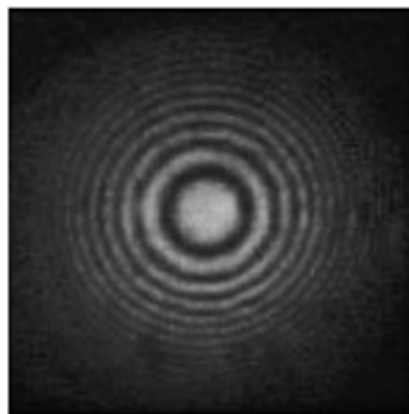


FIGURE 6 – Figure d'interférence : anneaux d'égale inclinaison

On souhaite maintenant régler l'appareil au contact optique.

5. Décrire l'opération : faut-il tourner ou translater un miroir ? Comment savoir dans quel sens ? Décrire l'évolution de la figure d'interférence au cours de l'opération. Quel est l'aspect de l'éclairement sur l'écran une fois ce réglage réalisé ?
6. Partant de cette situation on incline un des miroirs d'un petit angle α pour former un coin d'air. On éclaire le système en incidence quasi-normale de telle sorte que l'on observe des franges d'interférences rectilignes parallèles entre elles. Où sont-elles localisées ? Préciser les conditions de leur observation.
7. On admet que la différence de marche introduite par le coin d'air en un point M de la surface de localisation situé à une distance x de l'arête commune des deux miroirs est $\delta(M) \approx \pm 2n\alpha x$ avec $n = 1$. Déterminer l'interfrange i sur la surface de localisation, en fonction de α et λ_0 . Comment évolue la figure d'interférence si l'angle α varie ?

2.1.2

Une lame de savon est constituée d'une mince couche d'eau entourée de part et d'autre par une couche de savon. Cette configuration est due aux tensio-actifs contenus dans le savon. Ces molécules sont constituées de deux parties distinctes : une tête hydrophile, généralement ionique, et une queue hydrophobe, généralement constituée d'une chaîne carbonée (figure 7).

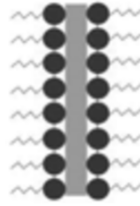


FIGURE 7

Cette propriété amène ainsi les tensio-actifs à se concentrer et à se fixer les uns aux autres aux interfaces entre l'eau et l'air. En éclairage monochromatique, cette lame fait apparaître des franges d'interférence (figure 8), dont l'interfrange diminue vers le bas de la lame. Ces franges sont liées à un phénomène d'interférence se produisant sur une couche mince. On suppose ici que l'indice de cette fine couche est $n \approx 1.4$. L'épaisseur de cette couche est variable de haut en bas sans dépasser une épaisseur maximum d'environ $1 \mu m$. La masse volumique et la viscosité du liquide savonneux sont pris égaux à ceux de l'eau.

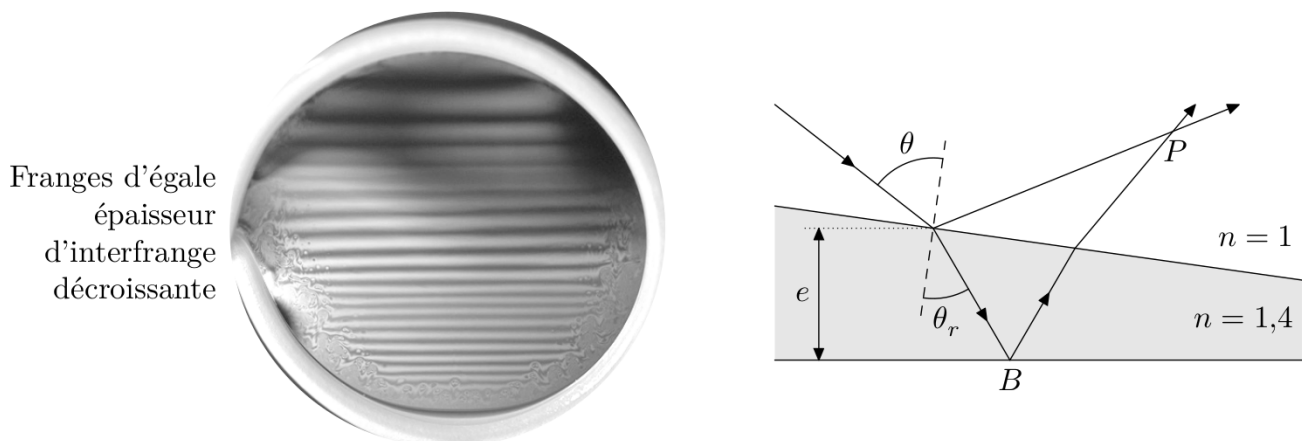


FIGURE 8

Le trajet d'un rayon lumineux arrivant sous incidence θ sur une lame d'indice n et d'épaisseur locale e , doit tenir compte du phénomène de réfraction à l'intérieur de la lame. On note θ_r l'angle de réfraction et θ l'angle d'incidence. Une division d'amplitude se produit sur la face avant, suivie d'une réflexion sur la face arrière, produisant deux rayons réfléchis par la lame qui interfèrent au point P . On admet que la réflexion sur un milieu plus réfringent s'accompagne d'un déphasage de π .

8. Justifier qu'en incidence quasi-normale, le déphasage entre les deux ondes qui interfèrent peut s'écrire

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2ne + \frac{\lambda_0}{2} \right)$$

En l'absence de perturbation extérieures (telles que celles qui seront abordées par la suite) la lame n'est le siège que de son écoulement gravitaire (du haut vers le bas sous l'effet de la gravité). Dans le cadre d'un modèle simplifié, dit d'interface sans interaction, la pression P au sein du fluide en écoulement gravitaire entre l'interface de tensioactifs est supposée uniforme. Le phénomène de drainage des tensioactifs est alors négligé. L'axe (Oz) sera pris vertical ascendant. La figure 9 présente la figure d'interférence observée sur un film de savon, ainsi que les notations introduites.

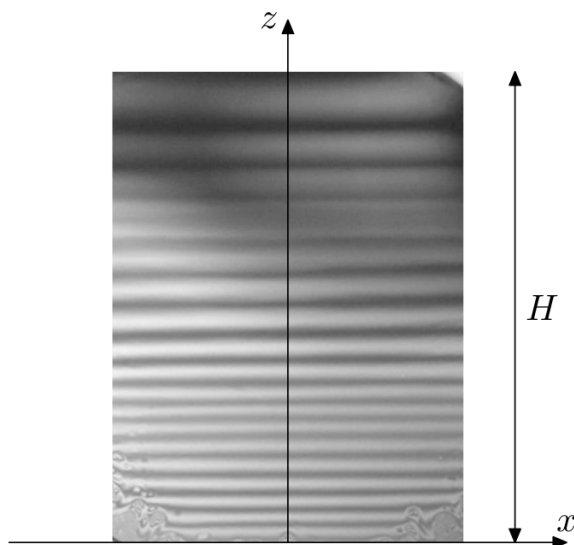


FIGURE 9 – Vue de face de la lame de savon

On note $H = 5,0 \text{ cm}$ la hauteur de la lame de savon. On note $e(z, t)$ l'épaisseur de la lame, dans la direction (Oy) , à l'altitude z et à l'instant t . Du fait de l'écoulement de drainage gravitaire, cette épaisseur varie au cours du temps à z fixé et à t fixé elle augmente vers le bas.

9. Compte tenu de la topographie des franges observées sur la figure 9, discuter qualitativement l'écart du profil de la lame à une portion de coin d'angle constant, induit par son drainage gravitaire.

Afin d'interpréter ces différences, une modélisation de mécanique des fluides, non détaillée ici, aboutit à l'expression suivante pour l'épaisseur e de la lame en fonction de z et du temps :

$$e(z, t) = \sqrt{\frac{2\eta(H - z)}{\rho g t}}$$

10. Discuter qualitativement la validité de cette expression en regard de la figure 9.

Pour aller plus loin dans la caractérisation de la variation de l'épaisseur de la lame, on se propose d'effectuer une approche semi-empirique de la loi de variation de l'épaisseur de la lame. On se place à t fixé et on suppose une loi de puissance semi-empirique de la forme

$$e(z, t) = K(H - z)^\beta$$

où β et K sont des constantes. On relève pour cela expérimentalement la position des premières franges brillantes. Le tableau 1 présente les résultats obtenus en indiquant la position z de ces franges, pour un éclairage monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et un film de savon d'indice optique $n = 1,4$.

Numéro de la frange brillante	1	2	3	4	5	6	7	8
Position z (cm)	4,5	4,1	3,7	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6

TABLE 1

11. Compte tenu de ces valeurs numériques, analyser graphiquement, à l'aide du support fourni en figure B du document réponse page 9, si cette loi semi-empirique est conforme aux observations. Si c'est le cas, donner la valeur numérique de β .



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Numéro de place

--	--	--	--	--	--

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--	--

Signature

Nom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Épreuve : Physique 1 PC

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

--	--

 /

--	--

Question 1

Lame d'air équivalente

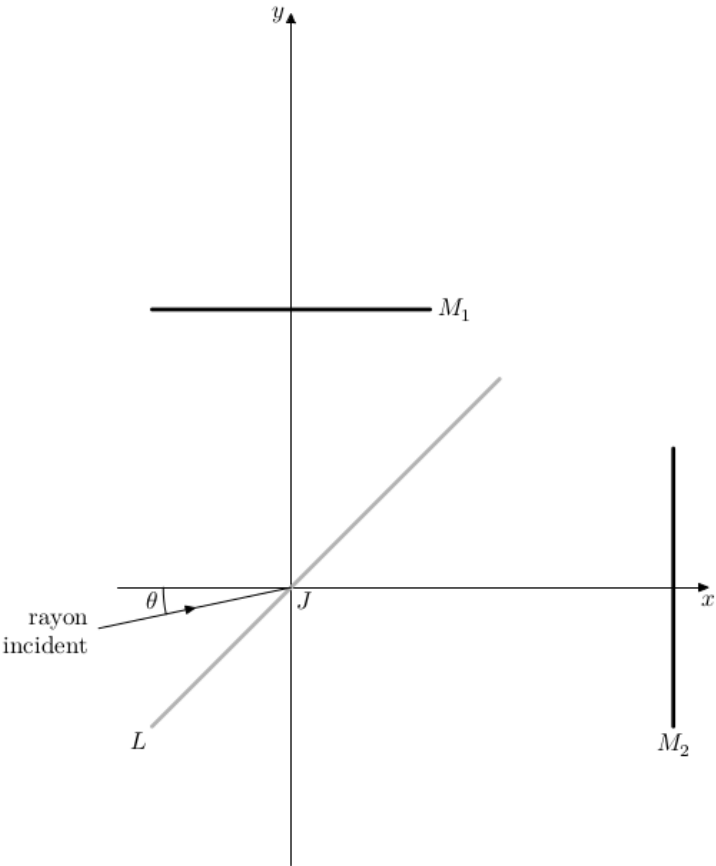


Figure A

Question 11

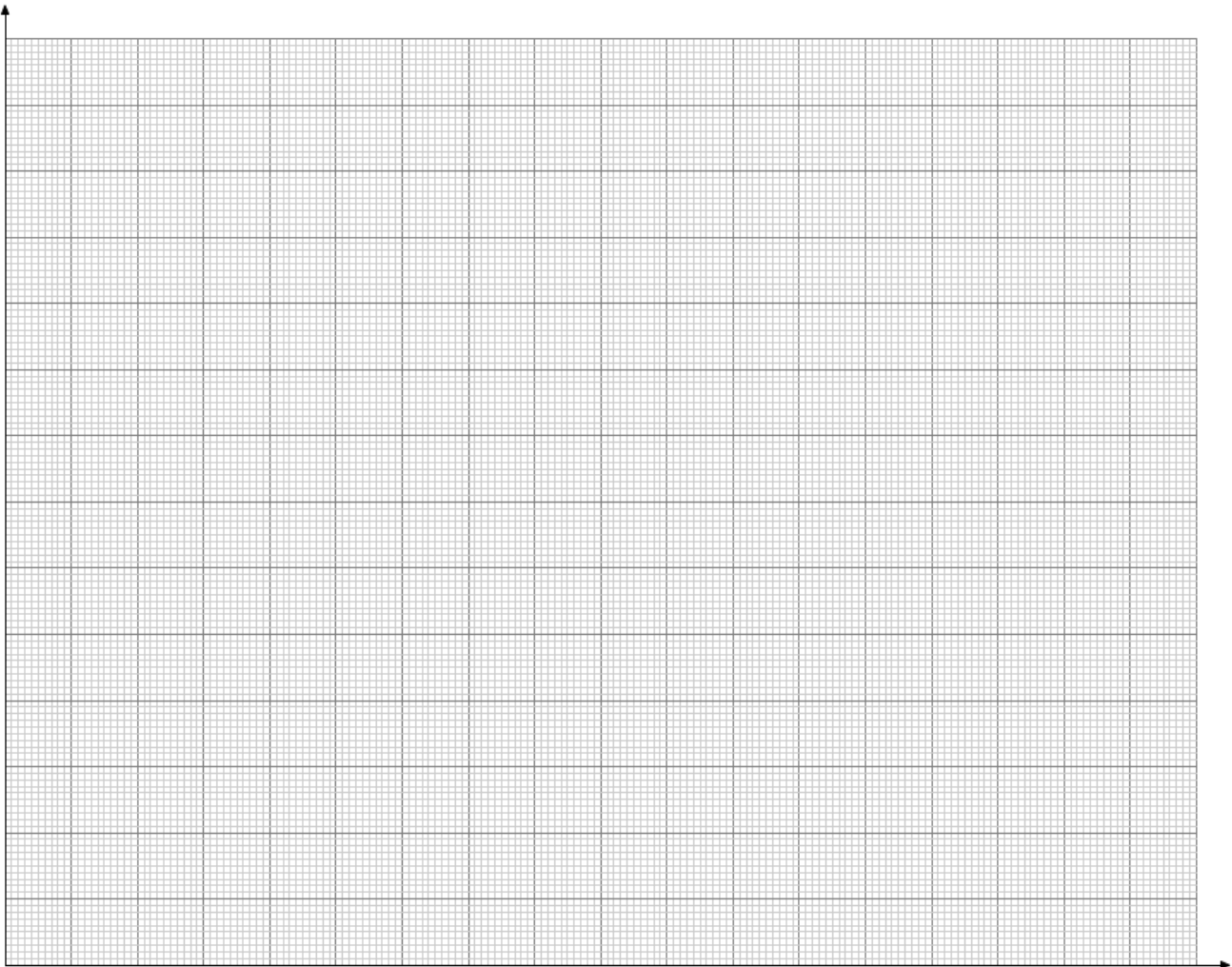


Figure B

Formulaire et données

L'espace est rapporté au trièdre direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On donne, en coordonnées cartésiennes, les opérateurs

- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} \xi = \overrightarrow{\nabla}(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \vec{e}_z$;
- divergence : $\text{div } \vec{E} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$;
- rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$;
- laplacien scalaire : $\Delta(\xi) = \nabla^2(\xi) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$;
- laplacien vectoriel : $\overrightarrow{\Delta}(\vec{E}) = \nabla^2(\vec{E}) = \Delta(E_x) \vec{e}_x + \Delta(E_y) \vec{e}_y + \Delta(E_z) \vec{e}_z$.

On rappelle par ailleurs que

- le rotationnel d'un gradient est nul : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} \xi) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla}(\xi) = \vec{0}$;
- la divergence d'un rotationnel est nulle : $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{E}) = 0$;
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div } \vec{B}) \vec{A} - (\text{div } \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$;
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \overrightarrow{\Delta}(\vec{A})$.

	Eau	Air
Masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	$\rho_e = 1,0 \times 10^3$	$\rho_a = 1,3$
Viscosité dynamique ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	$\eta_e \approx 1,0 \times 10^{-3}$	$\eta_a \approx 1,8 \times 10^{-5}$