

Corrigé du devoir en temps libre n°5

Problème I

1. On a φ à valeurs dans E et φ linéaire par bilinéarité du produit et de la trace d'où

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

2. Soit $M \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$. On a

$$\varphi(M) = \lambda M \iff \text{Tr}(M)A = (\lambda + \text{Tr}(A))M$$

Si $\lambda = -\text{Tr}(A)$, on trouve $\varphi(M) = \lambda M \iff M \in \text{Ker Tr}$

ce qui prouve $-\text{Tr}(A) \in \text{Sp}(\varphi)$ et $E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi) = \text{Ker Tr}$. Si $\lambda \neq -\text{Tr}(A)$, on a $M \in \text{Vect}(A)$ autrement dit $E_\lambda \subset \text{Vect}(A)$. On trouve $\varphi(A) = 0$ d'où $\text{Vect}(A) \subset E_0(\varphi)$ et comme $0 \neq -\text{Tr}(A)$, on a $E_0(\varphi) \subset \text{Vect}(A)$. Ainsi

$$\text{Sp}(\varphi) = \{0, -\text{Tr}(A)\} \quad \text{et} \quad E_0(\varphi) = \text{Vect}(A) \quad \text{et} \quad E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi) = \text{Ker Tr}$$

On a $\dim E_0(\varphi) + \dim E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi) = \dim E$ ce qui prouve la diagonalisabilité de φ et dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $E = E_0(\varphi) \oplus E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi)$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -\text{Tr}(A)I_{n^2-1} \end{array} \right)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable et } \det(\varphi) = 0, \text{Tr}(\varphi) = -(n^2 - 1)\text{Tr}(A).}$$

Variante : On observe $\varphi^2 = -\text{Tr}(A)\varphi$ et on peut en déduire que $-\frac{1}{\text{Tr}(A)}\varphi$ est un projecteur. Les résultats suivent.

Problème II

1. On a $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On dispose donc de $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Soit $\mathcal{B} = (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ et $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0_E$. Supposons les α_i non tous nuls. On pose

$$\ell = \text{Min} \{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_k \neq 0\}$$

Ainsi

$$0_E = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = \sum_{i=\ell}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0)$$

et en appliquant $u^{n-1-\ell}$ de chaque côté de l'égalité (ce qui a du sens puisque $n-1-\ell \geq 0$), il vient

$$u^{n-1-\ell} \left(\sum_{i=\ell}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) \right) = \alpha_\ell u^{n-1}(x_0) = 0_E$$

Il s'ensuit $\alpha_\ell = 0$ ce qui contredit l'existence de ℓ . Par conséquent, la famille $\mathcal{B}$ est libre, de cardinal égal à $\dim E$ ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de E et on conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est cyclique.}}$$

2. Supposons u cyclique. On dispose de $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Par conséquent, il existe $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $u^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x_0)$ et la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ a donc la forme attendue. Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de u telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ est compagne. On a $u(e_1) = e_2, u(e_2) = e_3, \dots, u(e_{n-1}) = e_n$ d'où $e_i = u^i(e_1)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ par récurrence immédiate. On conclut

u est cyclique $\iff$ il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ est compagne

3.(a) soit $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Soit $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i = 0$. On évalue en x_0 d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0_E$$

et par liberté de la famille $\mathcal{B}$, il s'ensuit $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On conclut

La famille $(\text{id}, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.

3.(b) Notons $d = \deg \pi_u$. La famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. La famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[u]$ d'où $\dim \mathbb{K}[u] \geq n$ et par conséquent $d \geq n$. Or, on sait $d \leq n$ puisque π_u divise χ_u d'où $d = n$ et comme π_u et χ_u sont unitaires, on conclut

$$\pi_u = \chi_u$$

Problème III

(i) Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$ diagonalisables avec $u \circ v = v \circ u$. On a $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, comme u et v commutent, alors $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Notons v_λ l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$. On a v_λ diagonalisable car induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable. Ainsi, on peut trouver $\mathcal{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(u)$ qui soit base de diagonalisation de v_λ . Mais cette base est également constituée de vecteurs propres de u (associés à λ). Ainsi, en concaténant $\mathcal{B} = \biguplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$, on obtient une base de diagonalisation simultanée de u et v et on conclut

Il existe une base de diagonalisation pour u et v .

(ii) Le *centre* $Z(E)$ est défini par

$$Z(E) = \{M \in E \mid \forall C \in E \quad MC = CM\}$$

On a clairement $\text{Vect}(I_n) \subset Z(E)$. Soit $M \in Z(E)$. En particulier, pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on a

$$ME_{i,j} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} m_{k,\ell} \underbrace{E_{k,\ell} E_{i,j}}_{=\delta_{\ell i, i} E_{k,j}} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} E_{k,j} \quad \text{et} \quad E_{i,j} M = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} m_{k,\ell} \underbrace{E_{i,j} E_{k,\ell}}_{=\delta_{j,k} E_{i,\ell}} = \sum_{\ell=1}^n m_{j,\ell} E_{i,\ell}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ME_{i,j} = E_{i,j} M &\iff \sum_{k=1}^n m_{k,i} E_{k,j} = \sum_{\ell=1}^n m_{j,\ell} E_{i,\ell} \\ &\iff m_{i,i} = m_{j,j} \quad \text{et} \quad \text{pour } k \neq \ell \quad m_{k,\ell} = 0 \end{aligned}$$

On conclut

$$Z(E) = \text{Vect}(I_n)$$

1. L'application Φ est clairement à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la somme et bilinéarité du produit matriciel d'où

$$\Phi \in \mathcal{L}(E)$$

2.(a) Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on a

$$\Phi(M_{i,j}) = AM_{i,j} + M_{i,j}B = PDE_{i,j}Q^{-1} + PE_{i,j}\Delta Q^{-1}$$

et

$$DE_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n \lambda_{\ell} \underbrace{E_{\ell,\ell}E_{i,j}}_{\delta_{\ell,i}E_{\ell,j}} = \lambda_i E_{i,j} \quad E_{i,j}\Delta = \sum_{\ell=1}^n \mu_{\ell} \underbrace{E_{i,j}E_{\ell,\ell}}_{\delta_{j,\ell}E_{i,\ell}} = \mu_j E_{i,j}$$

Ainsi

$$\Phi(M_{i,j}) = \lambda_i PE_{i,j}Q^{-1} + \mu_j PE_{i,j}Q^{-1} = (\lambda_i + \mu_j)M_{i,j}$$

2.(b) La famille $(M_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ est donc une famille de vecteurs propres de φ et on vérifie sans difficulté qu'elle est libre ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de diagonalisation de Φ . Ainsi

$$A, B \text{ diagonalisables} \implies \Phi \text{ diagonalisable}$$

3.(a) On a χ_A scindé dans $\mathbb{C}[X]$ d'où A trigonalisable dans E . Ainsi, la matrice A est semblable à $\text{diag}(\lambda I_{m_{\lambda}})_{\lambda \in \text{Sp}(A)} + \text{diag}(T_{\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$ avec les T_{λ} triangulaires supérieures strictes. Un produit par blocs montre la commutation des deux matrices et en procédant de même pour la matrice B , on conclut

$$\text{On dispose de matrices } D_1, D_2 \text{ diagonalisables et } N_1, N_2 \text{ nilpotentes telles que } A = D_1 + N_1, B = D_2 + N_2 \text{ avec } D_1 N_1 = N_1 D_1 \text{ et } D_2 N_2 = N_2 D_2.$$

3.(b) Les applications Φ_d et Φ_n sont clairement des endomorphismes de E et le sens direct précédemment établi garantit la diagonalisabilité de Φ_d . Sans difficulté, on montre que l'endomorphisme Φ_n est somme des deux endomorphismes $M \mapsto N_1 M$ et $M \mapsto M N_2$ nilpotents et qui commutent d'où la nilpotence de Φ_n . Puis, pour $M \in E$, on a

$$\begin{aligned} \Phi_d \circ \Phi_n(M) &= D_1 N_1 M + N_1 M D_2 + D_1 M N_2 + M N_2 D_2 \\ &= N_1 D_1 M + N_1 M D_2 + D_1 M N_2 + M D_2 N_2 = \Phi_n \circ \Phi_d(M) \end{aligned}$$

ce qui prouve la commutation de Φ_d et Φ_n . Ainsi

$$\Phi_d \text{ est diagonalisable, } \Phi_n \text{ nilpotent avec } \Phi_d \circ \Phi_n = \Phi_n \circ \Phi_d$$

3.(c) Il en résulte que les endomorphismes $\Phi = \Phi_d + \Phi_n$ et Φ_d sont diagonalisables et commutent. Ils admettent donc une base commune de diagonalisation ce qui prouve la diagonalisabilité de $\Phi - \Phi_d$. Par conséquent

$$\text{L'endomorphisme } \Phi_n \text{ est diagonalisable}$$

3.(d) Ainsi, L'endomorphisme Φ_n est diagonalisable et nilpotent d'où $\Phi_n = 0$. En particulier, on a $\Phi_n(I_n) = 0$ d'où

$$N_1 = -N_2 \quad \text{et} \quad N_1 \in Z(E)$$

3.(e) Ainsi, la matrice N_1 est nilpotente et dans $\text{Vect}(I_n)$ d'où $N_1 = 0$ et par suite $N_2 = 0$. On conclut

$$\Phi \text{ diagonalisable} \implies A, B \text{ diagonalisables}$$