

Devoir en temps libre n°6

Problème I

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_\infty \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \quad N_3(f) = \|f'\|_\infty$$

1. Justifier que N_1, N_2, N_3 sont des normes.
2. Comparer ces normes.

Problème II

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in E$, on définit le *rayon spectral* de A noté $\rho(A)$ par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

Une norme $\|\cdot\|$ sur E est dite *sous-multiplicative* si elle vérifie

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

On pose $\forall A \in E \quad N(A) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

1. Montrer que N définit une norme sous-multiplicative sur E .
2. Soit $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \mapsto \|A\| = N(Q^{-1}AQ)$ est une norme sous-multiplicative.
3. Soit $A \in E$ telle que $\rho(A) < 1$.
 - (a) Justifier qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ triangulaire supérieure.
 - (b) Soit $\delta > 0$, $\Delta = \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$ et $\hat{T} = \Delta^{-1}T\Delta$. Montrer que $\hat{T}$ est triangulaire supérieure et qu'on peut choisir $\delta > 0$ tel que $N(\hat{T}) < 1$.
 - (c) Avec ce choix de δ , on pose $Q = P\Delta$ et on munit E de la norme $M \mapsto \|M\| = N(Q^{-1}MQ)$. Montrer que $\|A\| < 1$ et conclure que $A^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$.

Problème III

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on munit E de $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

On dit qu'une suite $(P_n)_n$ est de *Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq N \implies \|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$

1. Montrer que $(P_n)_n$ est de Cauchy.
2. Montrer que $(P_n)_n$ ne converge pas.