

Séance 2 - MP+ - 20/11/26

Exercice 1 (Décomposition de Dunford ****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Montrer qu'il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$ et d diagonalisable, n nilpotent. Établir également que d et u sont dans $\mathbb{K}[u]$.

Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires ***)

Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n$ suite récurrente linéaire d'ordre p (entier non nul) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n$$

avec $a_0, \dots, a_{p-1}$ des scalaires et $a_0 \neq 0$. On note $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ et on suppose P scindé dans

$\mathbb{K}[X]$ de la forme $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ avec les λ_i deux à deux distincts et les m_i des entiers non nuls. On note $\sigma : E \rightarrow E, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$ et $\Delta = \sigma - \text{id}$.

- Justifier que $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ puis interpréter S_H à l'aide de $P(\sigma)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et m entier non nul. On note $e_\lambda = (\lambda^n)_n$ et pour $u \in E$, on note $u = e_\lambda y$ avec $y \in E$. Enfin, pour k entier, on pose $r_k = (n^k)_n$ et $F_k = \text{Vect}(r_0, \dots, r_k)$.

(a) Justifier que y est bien définie puis établir

$$u \in \text{Ker}(\sigma - \lambda \text{id})^m \iff y \in \text{Ker} \Delta^m$$

(b) Établir $F_{m-1} \subset \text{Ker} \Delta^m$

(c) Conclure que l'inclusion précédente est une égalité.

- En déduire que $(n \mapsto n^j \lambda_i^n, i \in \llbracket 1; r \rrbracket, j \in \llbracket 0; m_i - 1 \rrbracket)$ est une base de S_H .
-

Exercice 3 (Trigonalisation simultanée ***)

Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaires supérieures.

Exercice 4 (****)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A, B) \in E^2$ et on pose $\Phi(M) = AM + MB$ pour tout $M \in E$. Justifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ puis montrer que les matrices A et B sont trigonalisables si et seulement si l'endomorphisme Φ l'est.

Exercice 5 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$, on pose

$$E_x = \text{Vect} (u^k(x), k \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0_E\}$$

L'endomorphisme u est dit *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$. On définit le *commutant* de u noté $\mathcal{C}(u)$ par

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

1. Soit $x \in E$. Justifier qu'il existe un polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I_x = \pi_{u,x}\mathbb{K}[X]$ et vérifiant $\pi_{u,x} | \pi_u$.
 2. (a) On suppose $\pi_u = P^\alpha$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible et α entier non nul. Établir qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi$.
(b) Généraliser le résultat précédent avec π_u quelconque. On pourra considérer sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
 3. En déduire u cyclique $\iff \pi_u = \chi_u$
 4. On suppose u trigonalisable.
(a) Établir $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$
(b) En déduire $\pi_u = \chi_u \iff \mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$
-

Exercice 6 (****)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{S}(A)$ la classe de similitude de A , *i.e.*

$$\mathcal{S}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ semblable à } A\}$$

1. Montrer que si A est inversible, alors $\overline{\mathcal{S}(A)} \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
 2. Montrer A diagonalisable $\iff \mathcal{S}(A)$ fermée
-

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Déterminer la nature topologique de

$$\Lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n \mid (x_1, \dots, x_n) \text{ libre}\}$$

Exercice 8 (****)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, continue surjective. Montrer que pour tout a réel, l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ n'est pas compact.

Indications

Exercice 1 (Décomposition de Dunford ****)

Indications : Pour l'existence d'un tel couple, utiliser un théorème de réduction du cours. Notant $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$, poser $F_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda}$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $(p_\lambda)_\lambda$ la famille de projecteurs associés à la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda$. Montrer que $p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$ puis conclure que d et n sont dans $\mathbb{K}[u]$. Pour l'unicité, considérer (d', n') un autre couple solution et justifier que d et d' commutent puis conclure.

Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires ***)

Indications : 2.(a) Justifier que y peut s'exprimer à partir de u puis déterminer $(\sigma - \lambda \text{id})^k(u)$ en fonction de y pour k entier.
2.(b) Pour k entier, observer $\Delta(F_k) \subset F_{k-1}$ puis généraliser pour $\Delta^\ell(F_k)$ par récurrence.
2.(c) Montrer que $\Phi : \text{Ker } \Delta^m \rightarrow \mathbb{K}^m, (u_n)_n \mapsto (u_0, \dots, u_{m-1})$ est un isomorphisme.
3. Utiliser le lemme des noyaux puis faire la synthèse des résultats intermédiaires.

Exercice 3 (Trigonalisation simultanée ***)

Indications : Montrer que A et B possèdent un vecteur propre commun puis procéder par récurrence.

Exercice 4 (****)

Indications : Considérer $f(M) = AM$ et $g(M) = MB$ pour $M \in E$. Observer que f et g commutent puis déterminer $P(f)(M)$ et $g(f)(M)$ pour $M \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. En déduire que f et g sont simultanément trigonalisables (voir exercice de trigonalisation simultanée). Établir l'inclusion $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi)$ en considérant $M = XY^\top$ avec X et Y des colonnes bien choisies dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ puis pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $M \in E$ avec $M \neq 0$, observer

$$\Phi(M) = \alpha M \iff AM = MC$$

avec C à préciser. En déduire $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) \neq \emptyset$ et préciser $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi)$. Enfin, considérer Φ comme endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis comme endomorphisme de E et conclure que les $\lambda_i + \mu_j$ sont dans $\mathbb{K}$ avec λ_i, μ_j valeurs propres respectives de A et B puis enfin que les λ_i et μ_j sont dans $\mathbb{K}$.

Exercice 5 (****)

Indications : 1. Observer que pour $x \in E$, le couple $(I_x, +)$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.
2.(a) Considérer $x \in E$ tel que $P^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_E$.
2.(b) Appliquer le résultat de la question 2.(a) à chaque u_i induit par u sur $E_i = \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u)$ où $\prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$ désigne la décomposition de π_u en facteurs irréductibles. En déduire la construction d'un vecteur $x \in E$ adapté pour avoir $\pi_{u,x} = \pi_u$.
3. Pour $x \in E$, établir $\dim E_x = \deg \pi_{u,x}$.
4.(a) Pour $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, considérer le système $TM - MT = 0$ et compter le nombre d'équations et d'inconnues. On pourra détailler les équations concernant les coefficients diagonaux du système.

Exercice 6 (****)

Indications : 1. Utiliser le déterminant.
2. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme minimal. Si A est diagonalisable, considérer $(B_k)_k \in \mathcal{S}(A)^\mathbb{N}$ avec $B_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} B$ puis déterminer $\pi_A(B)$. Comparer χ_A et χ_B et conclure. Si $\mathcal{S}(A)$ est fermée, considérer $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A puis $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de trigonalisation de u et ensuite $\mathcal{B}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2/k, \dots, \varepsilon_n/k^{n-1})$ avec k entier non nul.

Exercice 7 (***)

Indications : Considérer une suite $(x^{(k)})_k$ à valeurs dans $E \setminus \Lambda$ convergente de limite $x \in E$, un n -uplet $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)} = 0$ puis $\alpha^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{\|\lambda^{(k)}\|}$. A l'aide de cette suite $(\alpha^{(k)})_k$, établir que $x \in E \setminus \Lambda$.

Exercice 8 (****)

Indications : Par l'absurde, supposer qu'il existe a réel tel que $f^{-1}(\{a\})$ est compact puis considérer $B_R = B_f(0, R)$ qui contient $f^{-1}(\{a\})$ et étudier la connexité par arcs de $C_R = \mathbb{R}^2 \setminus B_R$. Considérer enfin des réels c et d dans $\mathbb{R} \setminus f(B_R)$ tels que $c < a < d$ et aboutir à une contradiction.