Commentaires - Devoir surveillé n°2

I Quelques propriétés des racines de P_n'

1. Bon usage du théorème de Rolle mais plusieurs oublient de s'intéresser à $\deg \mathrm{P}_n'$ pour conclure.

2. Question peu réussie, des rédactions lourdes avec des récurrences qui ne s'imposent vraiment pas. Le simple comptage de 0 à n semble poser problème à plusieurs. Les relations coefficients/racines se retrouvent facilement en situation.

On a
$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k) = \mathrm{X}^{n+1} - \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) \mathrm{X}^n + \dots$$

d'où
$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n' &= (n+1)\mathrm{X}^n - \frac{n^2(n+1)}{2}\mathrm{X}^{n-1} + \dots \\ &= (n+1) \prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - x_{n,k}) = (n+1) \left(\mathrm{X}^n - \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}\right) \mathrm{X}^{n-1} + \dots\right) \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit les relations demandées.

3. Peu réussie. Les polynômes P_n et $\mathrm{P}_n(n-\mathrm{X})$ ont mêmes racines mais il faut localiser l'intervalle d'appartenance pour conclure, par unicité, à la relation $x_{n,k} + x_{n,n-k-1} = n$.

4. Simple application du résultat précédent, bien réussie par ceux qui ont traité la question 3.

5. Assez bien traitée.

6, ..., 11. Quelques très bonnes rédactions. Certains ont obtenu des résultats cohérents (avec leurs tableaux de variation) mais faux. Une partie des points leur a été attribuée.

II Un développement asymptotique

Dans l'ensemble, la fonction Γ est largement méconnue alors que son étude a été exposée en cours. Il faut réagir !

12. Peu réussie ! ⚠ Pour une majorité, il faut revoir la partie consacrée à Γ dans le cours. Par ailleurs, pour la non intégrabilité pour $x \leqslant 0$, il faut préciser que l'intégrande est de signe constant (soit pour le critère des équivalents, soit pour une comparaison de fonctions positives).

13. ⚠ Oubli massif de la continuité ! À reprendre pour un très grand nombre.

14. Vue en cours. Question non triviale mais très classique. À savoir refaire.

15. Résultat classique, facile et traité en cours. Il n'est pas acceptable que certains échouent sur cette question. Le théorème des croissances comparées doit être cité quand il est utilisé.

16. Question très difficile mais qui avait été traitée en cours. Quelques uns s'en souvenaient.

17. Assez bien réussie seulement. Certaines rédactions sont d'une lourdeur invraisemblable.

18. Globalement bien traitée mais pas par tous, ce qui est un problème pour un calcul traité en cours et en devoir maison.

19. Question triviale. Il faut mentionner « série téléscopique » pour que le lien soit clairement établi. Ceux qui ont échoué sur cette question doivent réagir !

20. Question technique. Très peu de points accordés ici sur l'ensemble des copies.

21. Quelques uns ont identifié avec succès l'intégration d'une relation de comparaison et il faut écrire la séquence « par intégration de relation de comparaison ». Par ailleurs, il faut préciser que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{C}\,\mathrm{d}t$ diverge avec l'intégrande de signe constant.

22. Question difficile que personne n'a complètement réussie.

23. Bien réussie dans quelques copies. On rappelle qu'il est interdit d'additionner des équivalents !

III Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

Partie très peu abordée.

24. Quelques rares se sont aventurés ici. La question était accessible.

25, 26. Quasiment aucun point accordé sur ces questions.