ISM MP, Mathématiques
Année 2026/2027

Feuille d'exercices n°30

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathcal{O} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) \neq 0\}$ et on note

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sup_{t\in[\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \sup_{t\in[\,1\,;2\,]} |\mathrm{P}(t)|$$

Déterminer la nature topologique de $\mathcal{O}$ pour les normes N_1 et N_2.

Corrigé : Notons $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$. L'application est clairement continue pour N_1 et on a $\mathcal{O} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puis, la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ avec $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{n}$ pour n entier non nul est à valeurs dans $\mathcal{O}$, convergente de limite nulle donc hors de $\mathcal{O}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{O} \text{ est ouvert non fermé pour la norme } \mathrm{N}_1.}$$

Posons $\mathrm{P}_n = (1 - \mathrm{X}/2)^n$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(\mathrm{P}_n) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n) = \sup_{t\in[\,1\,;2\,]} \left|\left(1 - \frac{t}{2}\right)^n\right| = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi $$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}_2} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\mathrm{P}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \varphi(0)$$

L'application φ n'est donc pas continue pour N_2. Considérons $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}_n - 1$ pour tout n entier. On a $\mathrm{Q}_n \in \mathrm{E} \setminus \mathcal{O}$ pour tout n entier et $\mathrm{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}_2} -1 \notin \mathrm{E} \setminus \mathcal{O}$ d'où $\mathrm{E} \setminus \mathcal{O}$ n'est pas fermé, autrement dit $\mathcal{O}$ n'est pas un ouvert de E. De même, on a $\mathrm{P}_n \in \mathcal{O}$ pour tout n entier et $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}_2} 0$ avec $0 \notin \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ n'est pas un fermé de E. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{O} \text{ n'est ni ouvert, ni fermé pour la norme } \mathrm{N}_2.}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathrm{A} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que $\qquad \forall f \in \mathrm{A} \qquad \|f\|_\infty > 1$
3. Calculer $\mathrm{d}(0, \mathrm{A})$.

Corrigé : 1. Notons $\varphi_1 : f \mapsto f(0)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Les applications φ_1 et φ_2 sont continues pour $\|\cdot\|_\infty$ et on a

$$\mathrm{A} = \varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}([\,1\,;+\infty\,[)$$

La partie A est donc une intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues. On conclut

$\boxed{\text{La partie A est un fermé.}}$

2. Soit $f \in \mathrm{A}$ avec $\|f\|_\infty \leqslant 1$. On a

$$1 \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 (1-f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue positive d'intégrale nulle donc nulle. Il s'ensuit que f est constante égale à 1 ce qui contredit son annulation en 0. Ainsi

$$\boxed{\forall f \in \mathrm{A} \qquad \|f\|_\infty > 1}$$

3. D'après ce qui précède, on a clairement $\mathrm{d}(0,\mathrm{A}) \geqslant 1$. Pour n entier avec $n \geqslant 2$, on pose f_n affine par morceaux avec $f_n(t) = n^2 t/(n-1)$ pour $t \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ puis constante sur $\left[\frac{1}{n}\,;1\right]$. On trouve $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$ et $\|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{d}(0,\mathrm{A}) = 1}$$

Exercice 3 (***)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evn et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue

(ii) $\forall \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \qquad f(\bar{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$

(iii) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad \overline{f^{-1}(\mathrm{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathrm{B}})$

(iv) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad f^{-1}(\mathring{\mathrm{B}}) \subset (f^{-1}(\mathrm{B}))^\circ$

Corrigé : Supposons f continue. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $x \in \bar{\mathrm{A}}$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Par continuité de f, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ d'où $f(x) \in \overline{f(\mathrm{A})}$ ce pour tout $x \in \bar{\mathrm{A}}$. Ainsi, on a (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons (ii). Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{A} = f^{-1}(\mathrm{B})$. On a $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$ puis

$$f\left(\bar{\mathrm{A}}\right) \subset \overline{f(\mathrm{A})} \subset \bar{\mathrm{B}}$$

et comme $\bar{\mathrm{A}} \subset f^{-1}\left(f\left(\bar{\mathrm{A}}\right)\right)$, on obtient

$$\overline{f^{-1}(\mathrm{B})} \subset f^{-1}(\bar{\mathrm{B}})$$

L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv) est immédiate par complémentarité. Enfin, supposons (iv). Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathrm{E}$. On a

$$f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right) \subset \left(f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right)\right)^\circ$$

Il s'agit donc d'une égalité d'où $f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right)$ est ouvert. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0,\eta) \subset f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right)$ ce qui signifie exactement

$$\exists \eta > 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

On conclut $\boxed{\text{Les quatre assertions sont équivalentes.}}$

Exercice 4 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E lui-même.

Corrigé : Soit A une partie ouverte et fermée et non vide de E. Supposons $A \neq E$. Soit $a \in A$ et $b \notin A$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = a + t(b-a) \quad \text{et} \quad I = \{t \in [\,0\,;1\,] \mid \varphi(t) \in A\}$$

L'ensemble I est une partie non vide car $0 \in I$ et majorée par 1 donc admet une borne supérieure finie $\alpha \in [\,0\,;1\,]$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(\alpha_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. L'application φ est continue car $\|b-a\|$-lipschitzienne et par continuité, on a

$$\varphi(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) \in \bar{A} = A$$

Par ailleurs, l'ensemble A est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(\varphi(\alpha), r) \subset A$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(\alpha + \frac{r}{2\|b-a\|}\right) = \varphi(\alpha) + \frac{r}{2}\frac{b-a}{\|b-a\|} \in B(\varphi(\alpha), r) \subset A \quad \text{et} \quad \alpha + \frac{r}{2\|b-a\|} > \alpha$$

ce qui est absurde par définition de α en tant que borne supérieure de I. L'hypothèse qu'il existe une partie A ouverte et fermée non vide de E et distincte de E est donc fausse. On conclut

$$\boxed{\text{Les parties ouvertes et fermés de E sont } \varnothing \text{ et E lui-même.}}$$

Variantes : (a) On a $\varphi(1) = b \notin A$ d'où $\alpha < 1$ et par définition de α, on a $\varphi(t) \notin A$ pour tout $t \in]\,\alpha\,;1\,]$. Comme $E \setminus A$ est fermé, considérant une suite $(\beta_n)_n \in]\,\alpha\,;1\,]^{\mathbb{N}}$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, il vient par continuité

$$\varphi(\beta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) \in E \setminus A$$

ce qui contredit $\varphi(\alpha) \in A$.

(b) On montre que $\mathbb{1}_A$ est continue. Si $x \in A$, alors il existe U ouvert $\subset A$ tel que $\mathbb{1}_A(y) = 1$ pour tout $y \in U$ d'où la continuité. Si $x \notin A$, on fait de même puisque $E \setminus A$ est ouvert. Ainsi, on a $t \mapsto \mathbb{1}_A(xt + (1-t)y)$ continue avec $x \in A$ et $y \notin A$ et on obtient une contradiction.

Exercice 5 (***)

Soit n entier non nul et Ω_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples de degré égal à n. Montrer que Ω_n est un ouvert.

Corrigé : Soit $P \in \Omega_n$. On note $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les racines distinctes de P. Soit $\beta_0, \ldots, \beta_n$ des réels tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$. On considère $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}, Q \mapsto (Q(\beta_0), \ldots, Q(\beta_n))$. L'application f est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut choisir $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que si $\|Q - P\| \leqslant \varepsilon$, alors $Q(\beta_i)P(\beta_i) > 0$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$. Par suite, on a $Q(\beta_i)Q(\beta_{i+1}) < 0$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$ ce qui prouve que Q est scindé à racines simples. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(P, \varepsilon) \subset \Omega_n$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Omega_n \text{ est un ouvert.}}$$

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{E} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\right\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ pour $u \in \mathrm{E}$ et $\varphi \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $(y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tel que $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$ pour tout $u \in \mathrm{E}$.

Corrigé : On procède par analyse/synthèse.

• **Analyse :** On suppose l'existence de y. Soit k entier et $\delta_k = (\delta_{k,n})_n$. On a $\varphi(\delta_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{k,n} y_n = y_k$. La suite $y = (y_n)_n = (\varphi(\delta_n))_n$ est donc déterminée de manière unique sous réserve d'existence.

• **Synthèse :** On choisit le y précédemment déterminé. L'application φ est linéaire continue donc lipschitzienne en 0, *i.e.* il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que

$$\forall u \in \mathrm{E} \qquad |\varphi(u)| \leqslant \mathrm{C}\|u\|_1$$

Ainsi $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |y_n| = |\varphi(\delta_n)| \leqslant \mathrm{C}\|\delta_n\|_1 = \mathrm{C}$$

Soit N entier et $u \in \mathrm{E}$. La série $\sum u_n y_n$ converge absolument. Par linéarité, on a

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u\delta_n\right) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \varphi(u\delta_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \varphi(u_n\delta_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n\varphi(\delta_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n y_n \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$$

Enfin, comme le reste d'une série convergente est de limite nulle, il vient

$$\|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u\delta_n - u\|_1 = \|\sum_{n\geqslant \mathrm{N}+1} u\delta_n\|_1 = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

Par continuité, il en résulte $$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$$

On conclut

$$\boxed{\text{Il existe un unique } (y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ bornée tel que } \varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n \text{ pour tout } u \in \mathrm{E}.}$$

Remarque : L'espace E est habituellement noté $\ell^1(\mathbb{N})$ et l'espace des suites bornées noté $\ell^\infty(\mathbb{N})$. L'ensemble des formes linéaires continues sur $\ell^1(\mathbb{N})$ est appelé *dual topologique* de $\ell^1(\mathbb{N})$ et noté $\ell^1(\mathbb{N})'$. On a démontré précédemment l'égalité

$$\ell^1(\mathbb{N})' \simeq \ell^\infty(\mathbb{N})$$

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A une partie non vide bornée de E. On note $\delta(\mathrm{A}) = \sup_{(x,y)\in \mathrm{A}^2} \|x-y\|$. Montrer

$$\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}}) = \delta(\partial \mathrm{A})$$

Corrigé : Il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. Ainsi, pour $x \in \bar{\mathrm{A}}$, comme il existe $(x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, on a

$$\|x\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| \leqslant \mathrm{M}$$

On en déduit que $\bar{\mathrm{A}}$ est bornée et $\partial \mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$ également. Avec $\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$, il vient clairement $\delta(\mathrm{A}) \leqslant \delta(\bar{\mathrm{A}})$. Soit $(a, b) \in \bar{\mathrm{A}}^2$. Il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ dans $\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Ainsi

$$\|a-b\| = \lim_{n\to+\infty} \|a_n - b_n\| \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|a_n - b_n\| \leqslant \delta(\mathrm{A})$$

Par conséquent $$\boxed{\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}})}$$

Soit $(a,b) \in \mathrm{A}^2$ distincts (si A est un singleton, le problème est trivial). On pose $\varphi : t \mapsto a + t(b-a)$. L'ensemble $\mathrm{I} = \{t \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. En effet, pour $t \in \mathrm{I}$, on a

$$|t| = \frac{1}{\|b-a\|}\|t(b-a) + a - a\| \leqslant \frac{1}{\|b-a\|}\left(\mathrm{M} + \|a\|\right)$$

On note $t_0 = \text{ Inf I}$ et $t_1 = \text{ Sup I}$. On a clairement $t_1 \geqslant 1$ et $t_0 \leqslant 0$. Par caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures, on obtient $\varphi(t_0) \in \bar{\mathrm{A}}$ et $\varphi(t_1) \in \bar{\mathrm{A}}$. Supposons $\varphi(t_1) \in \mathring{\mathrm{A}}$. Il existe alors $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\varphi(t_1), r) \subset \mathrm{A}$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(t_1 + \frac{r}{2\|b-a\|}\right) = \varphi(t_1) + \frac{r}{2}\frac{b-a}{\|b-a\|} \in \mathrm{B}(\varphi(t_1), r) \subset \mathrm{A} \quad \text{et} \quad t_1 + \frac{r}{2\|b-a\|} > t_1$$

ce qui est absurde par choix de t_1. On en déduit que $\varphi(t_1) \notin \mathring{\mathrm{A}}$ d'où $\varphi(t_1) \in \bar{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}} = \partial\mathrm{A}$. On procède à l'identique pour $\varphi(t_0)$. Enfin, on a

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\| = \|(t_1 - t_0)(b-a)\| = (t_1 - t_0)\|b-a\| \geqslant \|b-a\|$$

d'où $$\forall (a,b) \in \mathrm{A}^2 \qquad \delta(\partial\mathrm{A}) \geqslant \|b-a\|$$

Passant à la borne supérieure, on obtient $\delta(\partial\mathrm{A}) \geqslant \delta(\mathrm{A})$ et comme $\partial\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$, on a $\delta(\partial\mathrm{A}) \leqslant \delta(\bar{\mathrm{A}}) = \delta(\mathrm{A})$. On conclut

$$\boxed{\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}}) = \delta(\partial\mathrm{A})}$$

Exercice 8 (***)

Soit E un evn et soit f une forme linéaire non nulle et continue sur E. Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f) \times \|f\|_{\mathrm{op}} = |f(x)|$$

Corrigé : Le noyau $\mathrm{Ker}\ f = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E par continuité de f. Si $x \in \mathrm{Ker}\ f$, l'égalité est vraie d'après la caractérisation métrique d'un fermé. Soit $x \notin \mathrm{Ker}\ f$. Par caractérisation séquentielle, on dispose d'une suite $(a_n)_n \in (\mathrm{Ker}\ f)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x - a_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)$$

Il vient pour n entier en observant $\|x - a_n\| \neq 0$ puisque $x \neq a_n \in \mathrm{Ker}\ f$

$$|f(x)| = |f(x - a_n)| = \left|f\left(\frac{x-a_n}{\|x-a_n\|}\right)\right| \|x - a_n\|$$

d'où $$|f(x)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{op}}\|x - a_n\|$$

et faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{op}} \times \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)$$

Soit $a \notin \mathrm{Ker}\ f$. On pose $$y = x - \frac{f(x)}{f(a)}a$$

et on a clairement $y \in \mathrm{Ker}\ f$. En particulier, on a $a \neq 0_{\mathrm{E}}$ et on en déduit

$$\|x - y\| = |f(x)|\,\frac{1}{|f\left(a/\|a\|\right)|} \geqslant \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)$$

d'où $$\frac{|f(x)|}{\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)} \geqslant \left| f\left(\frac{a}{\|a\|}\right)\right|$$

Pour $a \in \mathrm{Ker}\ f \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, l'inégalité vaut aussi et par conséquent

$$\forall a \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\} \qquad \frac{|f(x)|}{\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)} \geqslant \left| f\left(\frac{a}{\|a\|}\right)\right|$$

Ainsi $$\frac{|f(x)|}{\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)} \geqslant \|f\|_{\mathrm{op}}$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f) \times \|f\|_{\mathrm{op}} = |f(x)|}$$