ISM MP, Mathématiques
Année 2026/2027

Feuille d'exercices n°30

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathcal{O} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) \neq 0\}$ et on note

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sup_{t \in [0\,;1]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \sup_{t \in [1\,;2]} |\mathrm{P}(t)|$$

Déterminer la nature topologique de $\mathcal{O}$ pour les normes N_1 et N_2.

Indications : Étudier la continuer de l'application $\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{P}(0)$ puis considérer une suite simple à valeurs dans $\mathrm{E} \setminus \mathcal{O}$ pour discuter selon la norme N_1. Considérer la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ avec $\mathrm{P}_n = (1 - \mathrm{X}/2)^n$ et $(1 - \mathrm{P}_n)_n$ pour discuter selon la norme N_2.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathrm{A} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que $\qquad \forall f \in \mathrm{A} \qquad \|f\|_\infty > 1$
3. Calculer $\mathrm{d}(0, \mathrm{A})$.

Indications : 1. Écrire A comme intersection d'images réciproques.
2. Procéder par l'absurde.
3. Considérer la fonction continue f_n définie par $f_n(t) = n^2 t/(n-1)$ pour $t \in [\,0\,;1/n\,]$ et constante sur $[\,1/n\,;1\,]$.

Exercice 3 (***)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evn et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue
(ii) $\forall \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \qquad f(\bar{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$
(iii) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad \overline{f^{-1}(\mathrm{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathrm{B}})$
(iv) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad f^{-1}(\mathring{\mathrm{B}}) \subset (f^{-1}(\mathrm{B}))^\circ$

Indications : Montrer le cycle d'implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i). Exploiter la caractérisation séquentielle pour (i) $\Longrightarrow$ (ii). Considérer $f^{-1}(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon))$ avec $x_0 \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$ pour (iv) $\Longrightarrow$ (i).

Exercice 4 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E lui-même.

Indications : Considérer A une partie ouverte et fermée non vide de E et différente de E puis pour $a \in \mathrm{A}$ et $b \notin \mathrm{A}$, étudier l'ensemble $\mathrm{I} = \{t \in [\,0\,;1\,] \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$ avec $\varphi(t) = a + t(b-1)$ pour t réel.

Exercice 5 (***)

Soit n entier non nul et Ω_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples de degré égal à n. Montrer que Ω_n est un ouvert.

Indications : Pour $\mathrm{P} \in \Omega_n$, notant $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les racines de P, considérer $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$ puis $f : \mathrm{Q} \mapsto (\mathrm{Q}(\beta_0), \ldots, \mathrm{Q}(\beta_n))$ et remarquer que f linéaire sur un espace de dimension finie.

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{E} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\right\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ pour $u \in \mathrm{E}$ et $\varphi \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $(y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tel que $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$ pour tout $u \in \mathrm{E}$.

Indications : Procéder par analyse synthèse en utilisant les suites $\delta_k = (\delta_{k,n})_n$ pour k entier. Lors de la synthèse, exploiter une caractérisation de la continuité de φ.

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A une partie non vide bornée de E. On note $\delta(\mathrm{A}) = \underset{(x,y)\in \mathrm{A}^2}{\mathrm{Sup}} \|x - y\|$. Montrer

$$\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}}) = \delta(\partial \mathrm{A})$$

Indications : Montrer que $\bar{\mathrm{A}}$ est bornée puis $\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}})$ par double inégalité. Pour $\delta(\bar{\mathrm{A}}) \leqslant \delta(\mathrm{A})$, utiliser une caractérisation séquentielle des points adhérents. Puis, pour a, b distincts dans A, considérer $\varphi : t \mapsto a + t(b-a)$ et $\mathrm{I} = \{t \in \mathrm{R} \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$. Montrer que I est une partie non vide, bornée de $\mathbb{R}$ puis, notant $t_0 = \mathrm{Inf\ I}$ et $t_1 = \mathrm{Sup\ I}$, établir que $\varphi(t_0)$ et $\varphi(t_1)$ sont sur la frontière. Conclure.

Exercice 8 (***)

Soit E un evn et soit f une forme linéaire non nulle et continue sur E. Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f) \times \|f\|_{\mathrm{op}} = |f(x)|$$

Indications : Soit $x \notin \mathrm{Ker}\ f$. On dispose d'une suite $(a_n)_n \in (\mathrm{Ker}\ f)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x - a_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)$$

En déduire $$|f(x)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{op}} \times \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)$$

Considérer $a \notin \mathrm{Ker}\ f$ puis observer

$$\|x - \left(x - \frac{f(x)}{f(a)}a\right)\| \geqslant \mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}\ f)$$

et en déduire l'autre inégalité qui permet de conclure.