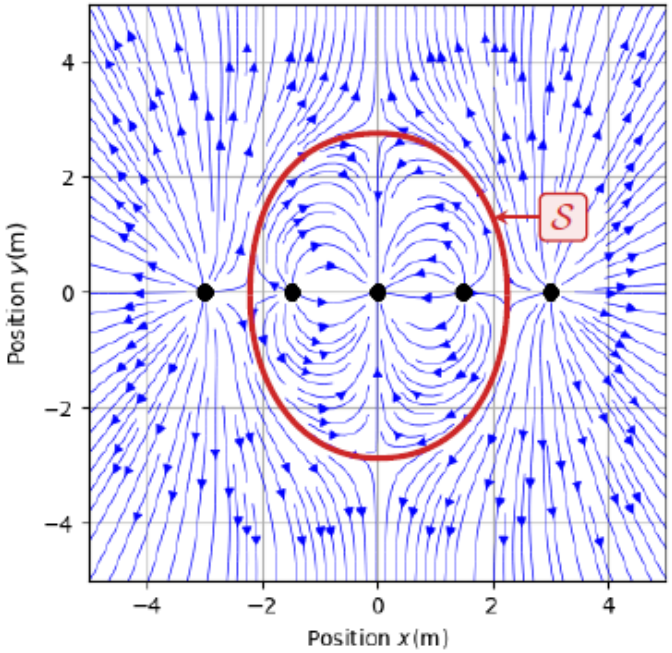
TD 7 : Électrostatique

Exercice 1: Lecture d'une carte de champ (⋆)

On donne ci-dessous les lignes de champ électrostatique produites par une distribution de charges ponctuelles. Les charges q_i sont numérotées de 1 à 5 de gauche à droite. La surface S sera discutée dans les questions.



1. Préciser le signe des charges q_i.
2. Préciser les plans de symétrie et d'anti-symétrie du champ électrostatique $\vec{E}$. Exprimer q_4 et q_5 en fonction des autres charges.
3. On admet que le champ $\vec{E}$ est nul en tout point de la surface S. Que peut-on dire sur les lignes de champ ? Déterminer l'expression de q_3 en fonction des autres charges.

Exercice 2: Electromètre (⋆⋆)

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m et de rayon r suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. Elles sont suspendues à un même point O par deux fils isolants de même longueur b. Une boule notée A est fixe, le point A est sur la verticale passant par O. L'autre notée P est mobile. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur supposé uniforme. On donne : $b = 12{,}0\,\text{cm}$, $m = 2{,}55\,\text{g}$, $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ et $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F}\,\text{m}^{-1}$.
Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée et la boule A porte la charge électrique Q. On met les deux boules en contact. La charge Q se répartit de manière égale entre les deux boules. II en résulte une déviation du fil OP d'un angle φ par rapport à la verticale.

1. Donner l'expression de l'intensité F de la force électrostatique qui s'exerce sur P. Quelle est sa direction ?
2. Déterminer l'expression de l'angle φ_e à l'équilibre.
3. Montrer que la mesure de l'angle φ_e à l'équilibre permet de mesurer la valeur de la charge Q.
4. On mesure $\varphi_e = 60\,°$. En déduire la valeur numérique de la charge Q.
5. Calculer l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p$ de P.
6. Retrouver l'expression de φ_e et étudier la stabilité de l'équilibre.

Exercice 3: Recherche d'une distribution de charges (⋆⋆)

Le potentiel créé par une distribution de charges a pour expression, en coordonnées sphériques :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

1. Quelles sont les dimensions de Q et de a ?
2. Déterminer le champ $\vec{E}$ résultant.
3. Déterminer la distribution de charges associée à ce potentiel.

Exercice 4: Un fil et un cylindre (⋆)

Soit la distribution (D) constituée par la réunion d'un fil infini (Oz) chargé avec la densité linéique uniforme $\lambda > 0$, et d'un cylindre infini de rayon R, d'axe (Oz), chargé avec la densité surfacique uniforme $\sigma > 0$.

1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.
2. Représenter graphiquement la fonction $||\vec{E}(M)||$ en fonction de la coordonnée d'espace dont elle dépend.
3. Commenter la continuité du champ électrostatique.

Exercice 5: Énergie de formation (⋆⋆)

On cherche à exprimer l'énergie de constitution $\mathcal{E}$ d'une sphère uniformément chargée, c'est à dire l'énergie qu'il faut fournir pour la construire en prenant toutes les charges qui la composent à l'infini. Cette sphère chargée peut modéliser un noyau atomique.

1. L'énergie recherchée dépend de la charge Q, du rayon R et de ϵ_0. Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de $\mathcal{E}$ à une constante sans dimension k près.

L'énergie de constitution est définie comme le travail qu'il faut fournir pour construire la sphère en prenant les charges à l'infini. On choisit pour la construire d'apporter les charges de façon infiniment lente et par couches sphériques concentriques successives.

2. En supposant qu'une sphère de rayon r a déjà été construite, déterminer le travail à fournir pour y ajouter une couche sphérique d'épaisseur dr. Commenter son signe.
3. En déduire l'énergie totale nécessaire pour construire la sphère de rayon R ainsi que la valeur de la constante k.
4. En supposant que cette énergie décrit bien l'énergie associée à un noyau atomique, déterminer sa valeur pour l'atome de Cobalt. On donne $A_{Co} = 60$, $Z_{Co} = 27$ avec le volume $\mathcal{V}$ du noyau $\mathcal{V} = A \times \frac{4}{3}\pi R_0^3$ et $R_0 = 1{,}3 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$.
Justifier que la prise en compte de l'interaction électrostatique seule ne permet pas d'expliquer la stabilité du noyau atomique.

Exercice 6: Charge en surface d'un semi-conducteur (⋆⋆)

Un semi-conducteur (matériau globalement neutre) se situant dans le domaine $x \geq 0$ est décrit par une distribution volumique de charges $\rho(x)$ à laquelle se superpose une distribution surfacique de charges uniforme σ_0 en $x = 0$.

Le champ électrique dans le semi-conducteur s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \exp(-x/\ell)\,\vec{u} \quad \text{avec} \quad E_0 > 0, \quad \ell > 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \text{ un vecteur unitaire.}$$

Le champ électrique est nul dans le domaine $x < 0$

1. Déterminer la direction $\vec{u}$ du champ électrique.
2. Exprimer la densité volumique de charges $\rho(x)$ pour $x < 0$ et $x > 0$ en fonction de E_0, ϵ_0, ℓ et x.
3. En déduire l'expression de σ_0 en fonction de E_0 et ϵ_0
4. Déterminer le potentiel en tout point de l'espace. On prendra $V(x \to +\infty) = 0$. Que vaut le potentiel en $x = 0$?

Exercice 7: Effet de pointe (⋆)

On cherche à montrer que, pour un potentiel donné, le champ à proximité d'une surface est d'autant plus intense que la surface est "pointue", c'est-à-dire que son rayon de courbure est faible. Ce phénomène s'appelle "pouvoir des pointes" et s'applique particulièrement aux surfaces des conducteurs à l'équilibre électrostatique dont la surface est équipotentielle. Il explique notamment que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus.

On modélise le conducteur par une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée en surface, au potentiel V. Afin de relier le champ au voisinage de la surface et le potentiel, on calcule d'abord le champ créé par une distribution surfacique homogène de densité σ puis on en déduit le potentiel.

1. Calculer le champ électrique créé en un point M extérieur à la sphère ($r > R$) et en un point M intérieur à la sphère ($r < R$).
2. En déduire l'expression du potentiel $V(r)$, en choisissant $V = 0$ à l'infini.
3. En déduire une relation entre le champ et le potentiel en $r = R$. Conclure

Exercice 8: Champ dans une cavité cylindrique (⋆⋆)

Un cylindre infini d'axe O_1z possédant une charge volumique uniforme ρ, présente une cavité cylindrique infinie (d'axe O_2z avec O_2 différent de O_1) vide de charges.

1. Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité et s'écrit $\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\overrightarrow{H_1H_2}$.

Exercice 9: Étude du système Terre-électrosphère (⋆⋆)

Au-delà d'une altitude $h = 60\,\mathrm{km}$, l'atmosphère est ionisée par le rayonnement solaire. Alors sa conductivité est suffisante pour que cette région soit équipotentielle, on l'appelle l'électrosphère. On la modélise par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R + h$ (où $R = 6000\,\mathrm{km}$ est le rayon de la Terre), de potentiel V_h et de charge Q ($Q > 0$) uniformément répartie en surface.

D'autre part la Terre est assimilée à un conducteur parfait de potentiel nul (boule équipotentielle) portant la charge $-Q$ uniformément répartie sur sa surface.

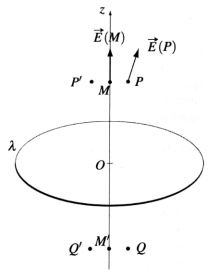
L'ensemble forme un condensateur sphérique dont l'armature intérieure est la Terre et dont l'électrosphère est l'armature extérieure. L'air entre les armatures a une permittivité proche de celle du vide. En réalité, l'air est faiblement conducteur et un faible courant de fuite circulant entre les armatures décharge rapidement le condensateur Terre-électrosphère. Mais la convection dans les nuages orageux est responsable de transferts de charges qui rechargent le condensateur et assurent une différence de potentiel de $V_h = 360\,\mathrm{kV}$ entre l'électrosphère et le sol.

On donne $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

1. Exprimer le champ électrostatique entre les armatures du condensateur en fonction notamment de Q. Qu'en est-il en dehors des armatures ? Le champ $\vec{E}$ est-il continu ?
2. En écrivant la circulation de ce champ entre la Terre et l'électrosphère, exprimer le potentiel $V_h = V(R + h)$ en fonction de Q, R, h et ϵ_0.
3. En déduire l'expression de la capacité du condensateur. Simplifier son expression compte tenu des valeurs numériques. Commenter le résultat obtenu. Faire l'application numérique de la capacité.
4. Calculer numériquement l'énergie électrostatique de ce condensateur et le champ électrostatique au niveau du sol.

Exercice 10: Anneau chargé (⋆⋆⋆)

On considère un cerceau d'axe (Oz) et de rayon a, chargé uniformément (densité linéique de charge λ).

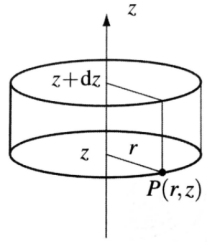


Le champ sur l'axe de l'anneau, en un point M de cote z, est de la forme $\overrightarrow{E} = E_0(z)\vec{e}_z$. L'expression de la fonction $E_0(z)$ est ici inutile pour résoudre l'exercice.
On s'intéresse au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point P défini par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec $r \ll a$.
De manière générale,

$$\overrightarrow{E}(P) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

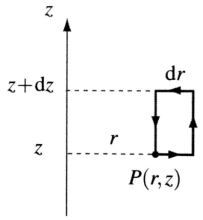
1. Montrer, par des arguments de symétrie très précis, qu'en P, $E_\theta(r,\theta,z) = 0$.
2. Montrer que la norme de $\overrightarrow{E}(P)$ ne dépend que de r et z.
3. Montrer que le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée située au voisinage de l'axe est nul. Que peut-on dire de sa circulation le long d'un contour fermé ?

On choisit r et $\mathrm{d}z$ tels que $\frac{r}{L^*}$ et $\frac{\mathrm{d}z}{L^*}$ soient des infiniment petits du premier ordre, où L^* est la distance caractéristique des variations spatiales des composantes du champ $\overrightarrow{E}$.



4. Calculer le flux du champ électrostatique à travers le cylindre représenté sur la figure précédente et en déduire l'expression de $E_r(r,z)$ en fonction de $E_0(z)$ et/ou de sa dérivée.
5. Justifier le fait que $E_z(r,z) - E_z(0,z)$ est au moins d'ordre deux en r.

On considère le rectangle ci dessous :



On a choisi $\frac{r}{L^*}$ infiniment petit d'ordre 1 donc $\frac{dr}{L^*}$ est un infiniment petits d'ordre 2.

6. En calculant la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long de ce rectangle, montrer que

$$E_z(r,z) = E_z(0,z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2E_0(z)}{dz^2}$$

7. Récapituler l'expression de $\overrightarrow{E}(P)$ au premier ordre en r, puis au deuxième ordre en r.

Exercice 11: Modèle d'orbitale atomique (⋆⋆⋆)

L'atome d'hydrogène est composé d'un proton de charge $+e$ formant le noyau en O et d'un nuage électronique dont la théorie quantique permet de déterminer la densité de charge ρ_e. Dans l'état fondamental, la densité de charges prend, en coordonnées sphériques la forme :

$$\rho_e(r) = K\exp\left(-2r/a0\right)$$

où a_0 est le rayon de Bohr.

On donne la primitive suivante

$$\int u^2\exp(-u) = -\left(u^2+2u+2\right)\exp(-u)$$

1. Déterminer l'expression de K permettant d'assurer la neutralité de l'atome.
2. Calculer le champ électrostatique et commenter sa décroissance avec la distance au noyau.

Éléments de réponses :

Exercice 1

Q3 : $q_3 = -2q_2$

Exercice 2

Q1 : $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{16b^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

Q2 : $\sin^3\frac{\varphi_e}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{32mgb^2}$

Q4 : $Q = 4{,}00\times10^{-7}\,\mathrm{C}$

Exercice 3

Q3 : $Q(r) = Q\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{a}}$

Exercice 5

Q1 : $\mathcal{E} = k\frac{Q^2}{R\epsilon_0}$

Q2 : $\delta W = \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0}\mathrm{d}r > 0$

Q3 : $k = \frac{3}{20\pi}$

Q4 : $\mathcal{E} = 1{,}2\times10^2\,\mathrm{MeV}$

Exercice 7

Q1 : $\vec{E}(r>R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ et $\vec{E}(r<R) = \vec{0}$

Q2 : $V(r\geq R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$ et $r\leq R : V(r\leq R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$

Q3 : $E(R^+) = \frac{V(R^+)}{R}$

Exercice 8

Q0 : Appliquer le principe de superposition en décomposant la distribution de charges en un cylindre d'axe O_1z et de densité volumique de charges ρ et un cylindre d'axe O_2z et de densité volumique de charges $-\rho$.

Exercice 9

Q1 : $\vec{E}(r\in]R,R+h[) = -\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Q2 : $V_h = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+h}\right)$

Q3 : $C \approx \dfrac{4\pi\epsilon_0 R^2}{h}$

Q4 : $W_{\mathrm{elec}} = 4{,}3\times10^9\,\mathrm{J}$ et $E(R^+) = 6\,\mathrm{V\,m^{-1}}$

Exercice 10

Q4 : $E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\times\dfrac{\mathrm{d}E_0(z)}{\mathrm{d}z}$

Exercice 11

Q1 : On résout $e + \int_0^{+\infty} 4\pi r^2 K\exp\left(-2r/a_0\right)\mathrm{d}r = 0 : K = -\dfrac{e}{\pi a_0^3}$.

Q2 : $\vec{E}(M) = \dfrac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1+\dfrac{2r^2}{a_0^2}+\dfrac{2r}{a_0}\right)\exp\left(-2r/a_0\right)\vec{e}_r$