ISM MP, Mathématiques
Année 2026/2027

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 7 **09/11/26 - 13/11/26**

Programme :

Espaces vectoriels normés :

- Norme, norme euclidienne, distance, distance à une partie, inégalité inverse ;
- Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathbb{K})$ espace des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$, normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sur $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$, espace produit, normes produits ;
- Suite d'un espace vectoriel normé, suite bornée, convergente, suites coordonnées d'une suite à valeurs dans un espace produit ou dans un espace de dimension finie, suites extraites, valeur d'adhérence ;
- Normes équivalentes, invariance des parties bornées par des normes équivalentes, invariance de la convergence par des normes équivalentes, équivalence des normes en dimension finie, équivalence de la convergence d'une suite à valeurs dans un espace de dimension finie ou un espace produit avec la convergence de ses suites coordonnées ;
- Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ et sur $\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$.

Topologie (début) :

- Boule ouverte, fermée, sphère, convexité des boules, ouvert, union d'ouverts, intersection finie d'ouverts, fermé, intersection de fermés, union finie de fermés, voisinage, point intérieur, intérieur, caractérisation d'un ouvert avec son intérieur, l'intérieur comme plus grand ouvert inclus dans l'ensemble, point adhérent, adhérence, partie dense, caractérisation séquentielle des points adhérents, caractérisation métrique des points adhérents, caractérisation d'un fermé avec son adhérence, caractérisation séquentielle d'un fermé, fermeture des sev en dimension finie, l'adhérence comme plus petit fermé contenant l'ensemble, frontière, invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente, cas de la dimension finie, topologie relative ;
- Limite d'une fonction en un point adhérent, extension au cas $\|x\| \to +\infty$ et $x \to \pm\infty$ (dans une partie de $\mathbb{R}$ non majorée ou non minorée), caractérisation séquentielle, caractérisation en dimension finie ou dans un espace produit, opérations algébriques sur les limites.

Questions de cours : (avec preuve)

1. L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathbb{K})$;
2. Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$;
3. Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$;
4. Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé ;
5. Union quelconque d'ouvert, intersection finie d'ouverts ;
6. Un ensemble est ouvert si et seulement s'il est égal à son intérieur ;
7. L'intérieur est le plus grand ouvert inclus dans l'ensemble ;
8. Caractérisation séquentielle des points adhérents ;
9. Caractérisation métrique des points adhérents ;
10. Un ensemble est fermé si et seulement s'il est égal à son adhérence ;
11. Caractérisation séquentielle d'un fermé, application aux sev de dimension finie ;
12. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.