ISM MP, Mathématiques
Année 2026/2027

Feuille d'exercices n°19

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. Déterminer les valeurs propres de σ.

Corrigé : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on trouve $\mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda\,\mathrm{id}\,) = \mathrm{Vect}\,((\lambda^n)_n)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de } \sigma \text{ est } \mathbb{K} \text{ tout entier.}}$$

Remarque : En particulier, pour $\lambda = 0$, on a $\mathrm{Ker}\,\sigma = \mathrm{Vect}\,((\delta_{0,n})_n)$.

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ et φ définie sur E par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Déterminer les éléments propres de φ.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la trace et du produit d'où $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit λ réel et $\mathrm{M} \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. On a

$$\varphi(\mathrm{M}) = \lambda \mathrm{M} \iff (\lambda - 1)\mathrm{M} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Par suite

$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff \mathrm{M} \in \mathrm{Ker\ Tr}$$

ce qui prouve que $1 \in \mathrm{Sp}\,(\varphi)$ et $\mathrm{E}_1(\varphi) = \mathrm{Ker\ Tr}$, hyperplan de E. Pour $\lambda \neq 1$, on a $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}{\lambda - 1}\mathrm{I}_n \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$ puis $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$. On en déduit que $n+1 \in \mathrm{Sp}\,(\varphi)$ avec $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{E}_{n+1}(\varphi)$ et on sait aussi $\mathrm{E}_{n+1}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$ car $n+1 \neq 1$ d'où l'égalité $\mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{1, n+1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_1(\varphi) = \mathrm{Ker\ Tr} \qquad \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)}$$

Remarque : On a $\dim \mathrm{E}_1(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \dim \mathrm{E}$ ce qui prouve le caractère diagonalisable de φ.

Variante : Après le calcul de $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$, on peut aussi écrire

$$\dim \mathrm{E} \geqslant \dim \mathrm{E}_1(\varphi) \oplus \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \dim \mathrm{E}_1(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) \geqslant n^2 - 1 + 1 = \dim \mathrm{E}$$

ce qui prouve l'égalité des dimensions.

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f, g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Si E est de dimension finie, établir

$$\mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$$

3. On choisit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}$ et $g : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$. Montrer que f, g sont dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis déterminer si zéro est valeur propre de $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'en déduit-on ?

Corrigé : 1. Soit λ valeur propre non nulle de $f \circ g$ et $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $f \circ g(x) = \lambda x$. En particulier, on a $g(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ puisque $f(g(x)) = \lambda x \neq 0_{\mathrm{E}}$. Par suite

$$g \circ f(g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$$

ce qui prouve λ valeur propre non nulle de $g \circ f$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles.}}$$

2. On rappelle que pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie, on a

$$u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det u \neq 0$$

On sait $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$ d'où

$$0 \in \mathrm{Sp}\,(f \circ g) \iff 0 \in \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f)}$

3. Les applications f et g sont clairement à valeurs dans E et sont linéaires, respectivement par linéarité du produit à gauche et de la dérivation. On a

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] \qquad f \circ g(\mathrm{P}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \in \mathrm{Sp}\,(f \circ g)$$

Puis, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$. On a $\deg \mathrm{P} \geqslant 0$ puis $\deg g \circ f(\mathrm{P}) \geqslant 0$ d'où $g \circ f(\mathrm{P}) \neq 0$ ce qui prouve que $0 \notin \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$. On conclut

$$\boxed{\text{En dimension quelconque, on n'a pas en général } \mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f).}$$

Exercice 4 (**)

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|\mathrm{M}\| = \underset{i \in [\![1\,;n]\!]}{\mathrm{Sup}} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Montrer

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}) \subset [\,-\|\mathrm{A}\|\,;\|\mathrm{A}\|\,]$$

Corrigé : Soit X colonne réelle non nulle telle que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ avec λ réel. Soit $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \underset{k \in [\![1\,;n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_k|$. La ligne i_0 de l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ donne

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire et comme $|x_{i_0}| > 0$ puisque X est non nulle, il vient

$$|\lambda| = \frac{1}{|x_{i_0}|} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \, \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant \|\mathrm{A}\|$$

On conclut $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}) \subset [\,-\|\mathrm{A}\|\,;\|\mathrm{A}\|\,]}$

Exercice 5 (**)

Soit n entier et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose

$$\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{X}\mathrm{P}$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Établir que la famille $\mathscr{B} = (\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k})_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ est une base de E et préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\varphi$.

Corrigé : 1. L'application φ est linéaire par linéarité de la dérivation et du produit. On a $\varphi(1) = -n\mathrm{X}$ puis

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad \varphi(\mathrm{X}^k) = (k-n)\mathrm{X}^{k+1} - k\mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$$

Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. La question fournit une famille de polynômes. On peut raisonnablement espérer qu'ils jouent un rôle particulier pour l'endomorphisme φ. On note

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!] \qquad \mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}$$

Puis, pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}_k) &= \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\left[k\mathrm{X}^{k-1}(\mathrm{X}-1)^{n-k} + (n-k)\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k-1}\right] - n\mathrm{X}\times\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}\\ &= \mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}\left[k(\mathrm{X}-1) + (n-k)\mathrm{X} - n\mathrm{X}\right] = -k\mathrm{P}_k\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{P}_k \neq 0$ (puisque $\deg \mathrm{P}_k = n$ par exemple), il s'ensuit que les P_k sont des vecteurs propres de E. Ainsi, on dispose d'une famille $\mathscr{B} = (\mathrm{P}_k)_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Par suite, la famille $\mathscr{B}$ est libre avec $\mathrm{Card}\,\mathscr{B} = \dim \mathrm{E}$ et forme donc une base de diagonalisation de φ. Comme les valeurs propres sont distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles et on a donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{-k, k \in [\![0\,;n]\!]\} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0\,;n]\!] \qquad \mathrm{E}_{-k}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{P}_k)}$$

Exercice 6 (*)

Soit n entier. On considère D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer π_{D}.

Corrigé : On a clairement $\mathrm{D}^{n+1} = 0$ d'où $\pi_{\mathrm{D}} | \mathrm{X}^{n+1}$. Ainsi, il existe $p \in [\![1\,;n+1]\!]$ tel que $\pi_{\mathrm{D}} = \mathrm{X}^p$. En particulier, on a

$$\pi_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})(\mathrm{X}^n) = \mathrm{D}^p(\mathrm{X}^n) = p!\tbinom{n}{p}\mathrm{X}^{n-p}$$

avec $\binom{n}{n+1} = 0$ par convention. Si $p < n+1$, alors on a $\deg \pi_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})(\mathrm{X}^n) \geqslant 0$ ce qui est absurde et par conséquent

$$\boxed{\pi_{\mathrm{D}} = \mathrm{X}^{n+1}}$$

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_{A} avec $\chi_{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}$, π_{A} avec $\pi_{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}$.

Corrigé : On a

$$\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \det\left(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{\mathrm{T}} = \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \chi_{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}$$

Notons $\pi_A = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a $\pi_A(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0$. En transposant cette égalité, il vient $\pi_A(A^T) = 0$ d'où $\pi_{A^T} | \pi_A$ et l'autre sens vient par symétrie des rôles. Les polynômes étant unitaires et associés, on conclut

$$\boxed{\chi_A = \chi_{A^T} \quad \text{et} \quad \pi_A = \pi_{A^T}}$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$, P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ avec $P \wedge Q = 1$ et $(PQ)(f) = 0$. Montrer

$$E = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Im } P(f)$$

Corrigé : Avec le lemme des noyaux, on a $E = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Ker } Q(f)$. Montrons $\text{Ker } Q(f) = \text{Im } P(f)$. On a $Q(f) \circ P(f) = 0$ d'où $\text{Im } P(f) \subset \text{Ker } P(f)$. Avec la relation de Bézout, il existe A, B dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Pour $x \in \text{Ker } Q(f)$, on a

$$x = P(f) \circ A(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x) = P(f) \circ A(f)(x) \in \text{Im } P(f)$$

Ainsi $$\boxed{E = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Im } P(f)}$$

Exercice 9 (*)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}\,(A) = 1$. Déterminer χ_A.

Corrigé : On a $\dim \text{Ker } A = \dim E_0(A) = n - 1$ d'où $X^{n-1} | \chi_A$. Ainsi, il existe $\alpha \in K$ tel que $\chi_A = X^{n-1}(X - \alpha) = X^n - \alpha X^{n-1}$. Or, on sait que

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}\,(A) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$$

Par identification, on conclut

$$\boxed{\chi_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}\,(A))}$$

Variante : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. En complétant une base de Ker u en base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$, on trouve la matrice par blocs $\text{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $C \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. En particulier, on a $\text{Tr}\,(A) = \text{Tr}\,(u) = \alpha$ et on trouve

$$\chi_A = \chi_u = X^{n-1}(X - \alpha) = X^{n-1}(X - \text{Tr}\,(A))$$

On peut aussi partir d'une base de Im u que l'on complète en base de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 10 (**)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}\,(A) = 1$. Déterminer π_A.

Corrigé : On prouve successivement qu'il existe X, Y des colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = XY^\top$ puis $A^2 = \text{Tr}\,(A)A$. On en déduit $\pi_A | X(X - \text{Tr}\,(A))$. Si $\deg \pi_A = 1$, alors A serait une matrice d'homothétie de rang 1. On exclut le cas $n = 1$ qui est trivial et on en déduit que $\text{rg}\ A \in \{0, n\}$ ce qui est impossible. On conclut

$$\boxed{\text{Pour } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ avec } n \geqslant 2 \text{ et } \text{rg}\ A = 1, \text{ on a } \pi_A = X^2 - \text{Tr}\,(A)X.}$$

Exercice 11 (**)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B) = \varnothing \iff \chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Corrigé : D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut écrire

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$$

$$\begin{aligned}
\text{Puis } \chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda(A)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\
&\iff \det\left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda(A)}\right) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} \left((-1)^n \chi_B(\lambda)\right)^{m_\lambda(A)} \neq 0 \\
\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(A) \qquad \lambda \notin \mathrm{Sp}\,(B)
\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B) = \varnothing \iff \chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

Exercice 12 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : On a $\det(u) \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}
\chi_u(u) = 0 &\iff u^n - \mathrm{Tr}\,(u)u^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)\,\mathrm{id} = 0 \\
&\iff (-1)^{n-1} \det(u)^{-1} \left[u^n - \mathrm{Tr}\,(u)u^{n-1} + \ldots\right] = \mathrm{id} \\
\chi_u(u) = 0 &\iff u \circ (-1)^{n-1} \det(u)^{-1} \left[u^{n-1} - \mathrm{Tr}\,(u)u^{n-2} + \ldots\right] = \mathrm{id}
\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{u^{-1} \in \mathbb{K}[u]}$$

Variante : Soit $\Phi : \mathbb{K}[u] \to \mathbb{K}[u], v \mapsto v \circ u$. On a $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[u])$ et $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ car u inversible. L'application Φ est un endomorphisme injectif en dimension finie. C'est donc un automorphisme et par suite, il existe $v \in \mathbb{K}[u]$ tel que $\Phi(v) = \mathrm{id}$ ce qui prouve le résultat attendu. Notant $\mathscr{B} = (u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ avec $d = \deg \pi_u$, on peut remarquer que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\Phi$ est la matrice compagne du polynôme minimal de π_u.

Exercice 13 (**)

Calculer χ_A avec $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : Avec successivement $C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i$ et $C_k \leftarrow C_k + C_1$ pour $k \in [\![\, 2\,;\, n \,]\!]$, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \ldots & -1 & X \end{vmatrix} = (X - n + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & \ldots & -1 & X \end{vmatrix} = (X - n + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & X+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \ldots & -1 & X+1 \end{vmatrix}$$

Ainsi $\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-n+1)(\mathrm{X}+1)^{n-1}}$

Variante : Notant $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u+\mathrm{id})$ de rang 1 donc semblable à une matrice $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathrm{L} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $\alpha = \mathrm{Tr}\,(u+\mathrm{id}) = n$ d'où $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} u$ semblable à $\left(\begin{array}{c|c} n-1 & \mathrm{L} \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{n-1} \end{array}\right)$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 14 (**)

Calculer χ_{A} avec $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \text{ ou } j=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : On a $$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}}\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \mathrm{L}_i$, il vient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1-\dfrac{n-1}{\mathrm{X}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \left(\mathrm{X}-1-\frac{n-1}{\mathrm{X}}\right)\mathrm{X}^{n-1}$$

Ainsi $\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-n+1)}$

Variantes : 1. Notant $\mathrm{P}_n = \chi_{\mathrm{A}}$, on obtient en développant sur la dernière colonne, on trouve

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{X}\mathrm{P}_{n-1} + (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \mathrm{X} \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = \mathrm{X}\mathrm{P}_{n-1} - \mathrm{X}^{n-2}$$

en développant le déterminant d'ordre $n-1$ sur la dernière ligne. On peut ensuite calculer P_n pour de petites valeurs de n afin de conjecturer une forme générale puis l'établir par récurrence ou considérer la fraction rationnelle $\mathrm{R}_n = \dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{X}^n}$ puisqu'on a

$$\mathrm{R}_n = \frac{\mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{X}^{n-1}} - \frac{1}{\mathrm{X}^2} = \mathrm{R}_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{X}^2}$$

ce qui prouve que la suite $(\mathrm{R}_n)_n$ est arithmétique et on peut donc déterminer son terme général aisément.

2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et $\varepsilon_2 = \sum_{i=1}^{n} e_i$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de Im u. On a

$$\mathrm{AX} = 0 \iff x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \iff \mathrm{X} = \sum_{i=3}^{n} - x_i(e_3 - e_i)$$

On pose $\varepsilon_i = e_3 - e_i$ pour $i \in [\![3\,;\, n]\!]$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Avec l'opération $\mathrm{C}_2 \leftarrow \sum_{i=2}^{n} \mathrm{C}_i$ sur la matrice

$$\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient une matrice constituée de n colonnes échelonnées non nulles ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ pour laquelle on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_u = \chi_{\mathrm{B}} \mathrm{X}^{n-2} = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - n + 1)\mathrm{X}^{n-1}$$