ISM MP, Mathématiques
Année 2026/2027

Feuille d'exercices n°20

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Corrigé : Soit λ valeur propre de u (existe car χ_u scindé). Les endomorphismes $u - \lambda\,\mathrm{id}$ et v commutent d'où $\mathrm{E}_\lambda(u)$ stable par v et notant v_λ l'endomorphisme induit, celui-ci admet une valeur propre et donc un vecteur propre associé (χ_{v_λ} est scindé). Un tel vecteur est vecteur propre de v_λ donc de v et dans $\mathrm{E}_\lambda(u)$ donc vecteur propre de u. Ainsi

$$\boxed{\text{Deux endomorphismes d'un } \mathbb{C}\text{-ev qui commutent ont un vecteur propre commun.}}$$

Exercice 2 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices par blocs

$$\mathrm{U} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline -\mathrm{B} & \lambda \mathrm{I}_n \end{array}\right)$$

1. À l'aide des matrices U et V, établir $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.
2. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Corrigé : 1. Le produit par bloc donne

$$\mathrm{UV} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{AB} & \lambda \mathrm{A} \\ \hline 0 & \lambda \mathrm{I}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{VU} \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \hline 0 & \lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{BA} \end{array}\right)$$

Comme on a $\det(\mathrm{UV}) = \det(\mathrm{VU})$, il s'ensuit $\lambda^n \chi_{\mathrm{AB}}(\lambda) = \lambda^n \chi_{\mathrm{BA}}(\lambda^n)$. Le polynôme $\mathrm{X}^n \chi_{\mathrm{AB}} - \mathrm{X}^n \chi_{\mathrm{BA}}$ admet donc une infinité de racines et on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}}$$

2. On a $$\overline{\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}}} = \overline{\det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\bar{\mathrm{A}})} = \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}) = \chi_{\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}}$$

Or, on sait $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} = \chi_{\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}}$ d'après le résultat précédent d'où l'égalité $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} = \overline{\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}}}$ et on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]}$$

Exercice 3 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que χ_{A} divise π_{A}^n.

Corrigé : On se place dans $\mathbb{C}$. On a $\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{m_\lambda(\mathrm{A})}$ et $\pi_{\mathrm{A}} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. Comme $\pi_{\mathrm{A}} | \chi_{\mathrm{A}}$ et que les racines de π_{A} sont exactement les valeurs propres de A, on a

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad 1 \leqslant \alpha_\lambda \leqslant m_\lambda(\mathrm{A}) \leqslant n \leqslant n\alpha_\lambda$$

d'où $$\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda(\mathrm{A})} \Big| \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X}-\lambda)^{n\alpha_\lambda} = \pi_{\mathrm{A}}^n$$

Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, il en résulte que $\chi_{\mathrm{A}} | \pi_{\mathrm{A}}^n$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a l'existence de $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\pi_{\mathrm{A}}^n = \mathrm{Q}\chi_{\mathrm{A}}$. Par conjugaison, comme π_{A} et χ_{A} sont dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il vient $\pi_{\mathrm{A}}^n = \bar{\mathrm{Q}}\chi_{\mathrm{A}}$ d'où $(\mathrm{Q}-\bar{\mathrm{Q}})\chi_{\mathrm{A}} = 0$ puis $\mathrm{Q} = \bar{\mathrm{Q}}$ par intégrité. La divisibilité a donc lieu dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} | \pi_{\mathrm{A}}^n}$$

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale avec $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_r)$ et $\mathrm{A}_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1\,;\, r]\!]$. Déterminer χ_{A} en fonction des χ_{A_i} et π_{A} en fonction des π_{A_i}.

Corrigé : Avec un calcul par blocs, il vient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \det \mathrm{diag}(\mathrm{X}\mathrm{I}_{m_1} - \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{X}\mathrm{I}_{m_r} - \mathrm{A}_r) = \prod_{i=1}^{r} \det \mathrm{diag}(\mathrm{X}\mathrm{I}_{m_i} - \mathrm{A}_i)$$

Puis, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on trouve, à nouveau par un calcul par blocs

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{diag}(\mathrm{P}(\mathrm{A}_1), \ldots, \mathrm{P}(\mathrm{A}_r))$$

Ainsi $$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0 \iff \forall i \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}_i) = 0$$

autrement dit $$\mathrm{P} \in \pi_{\mathrm{A}}\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] \iff \mathrm{P} \in \bigcap_{i=1}^{r} \pi_{\mathrm{A}_i}\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] = (\pi_{\mathrm{A}_1} \vee \ldots \vee \pi_{\mathrm{A}_r})\mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

Par conséquent, les polynômes π_{A} et $\pi_{\mathrm{A}_1} \vee \ldots \vee \pi_{\mathrm{A}_r}$ sont associés et unitaires donc égaux. On conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{r} \chi_{\mathrm{A}_i} \quad \text{et} \quad \pi_{\mathrm{A}} = \pi_{\mathrm{A}_1} \vee \ldots \vee \pi_{\mathrm{A}_r}}$$

Exercice 5 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-ev admettant un polynôme minimal π_u et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer $$\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$$
2. Montrer que si $\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{P}(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : 1. Si $\mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$, d'après le théorème de Bézout, il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ tel que $\mathrm{AP} + \mathrm{B}\pi_u = 1$ d'où

$$\mathrm{id} = \mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) + \mathrm{B}(u) \circ \pi_u(u) = \mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{A}(u)$$

ce qui prouve le sens indirect. Supposons $\mathrm{P} \wedge \pi_u \neq 1$. Notons $\mathrm{D} = \mathrm{P} \wedge \pi_u$. Comme D divise P et π_u, on a $\mathrm{P} = \mathrm{QD}$ et $\pi_u = \mathrm{RD}$ avec Q et R dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Comme π_u est non nul, on a R et D non nuls et D non constant puisque D est unitaire avec $\mathrm{D} \neq 1$. Il vient

$$\mathrm{R}(u) \circ \mathrm{P}(u) = \mathrm{R}(u) \circ \mathrm{D}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = \pi_u(u) \circ \mathrm{Q}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

Si $\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, en composant par $\mathrm{P}(u)^{-1}$ à droite, on obtient $\mathrm{R}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_u$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{P} \wedge \pi_u = 1}$$

Variante : Pour le sens direct, on peut aussi considérer $\mathrm{P} = \lambda \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles avec les α_i entiers non nuls. Supposons qu'il existe $i \in [\![1\,;\, r]\!]$ tel que $\pi_u = \mathrm{P}_i \mathrm{Q}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Il s'ensuit que π_u divise PQ d'où $\mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et en composant par $\mathrm{P}(u)^{-1}$ à gauche, on en déduit $\mathrm{Q}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ avec $\mathrm{Q} \neq 0$ et $\deg \mathrm{Q} < \deg \pi_u$ (car P_i non constant) ce qui est absurde. On en déduit que pour tout $i \in [\![1\,;\, r]\!]$, le polynôme irréductible P_i ne divise pas π_u autrement dit $\pi_u \wedge \mathrm{P}_i = 1$ et il s'ensuit $\mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$.

2. D'après ce qui précède, on a vu que si $\mathrm{P}(u)$ est inversible, alors il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) = \mathrm{id}$, autrement dit $\mathrm{A}(u) = \mathrm{P}(u)^{-1}$ et donc

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}), \text{ alors } \mathrm{P}(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u].}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

Montrer que f est nilpotent et que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Corrigé : Par récurrence, on montre

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$$

Posons $\qquad \mathscr{P}(k) : \quad f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$

L'initialisation $\mathscr{P}(0)$ est immédiate. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour k entier fixé. On a

$$\begin{aligned} f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} &= f \circ (f^k \circ g) - g \circ f^{k+1} = f \circ (g \circ f^k + k f^k) - g \circ f^{k+1} \\ &= (f \circ g) \circ f^k + k f^{k+1} - g \circ f^{k+1} = (g \circ f + f) \circ f^k + k f^{k+1} - g \circ f^{k+1} \\ f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} &= (k+1) f^{k+1} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On pose

$$\forall h \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \qquad \Phi(h) = h \circ g - g \circ h$$

On a $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathrm{E}))$ et $\Phi(f^k) = k f^k$ pour tout k entier. Si f n'est pas nilpotent, l'endomorphisme Φ aurait un nombre infini de valeurs propres ce qui est absurde. Il existe donc p entier non nul tel que $f^p = 0$. Puis, pour $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0_{\mathrm{E}}$ d'où $g(x) \in \operatorname{Ker} f$ ce qui prouve la stabilité de $\operatorname{Ker} f$ par g. L'endomorphisme induit $g_{\operatorname{Ker} f}$ est trigonalisable puisqu'on est dans un $\mathbb{C}$-ev. Un vecteur propre de $g_{\operatorname{Ker} f}$ est vecteur propre de g et également vecteur propre de f. On conclut

$$\boxed{\text{On a } f \text{ nilpotent et } f \text{ et } g \text{ admettent au moins un vecteur propre commun.}}$$

Variante : On a montré $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$ pour tout k entier. Par combinaison, linéaire, on en déduit

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(f) \circ g - g \circ \mathrm{P}(f) = (\mathrm{XP}')(f)$$

On prend $\mathrm{P} = \pi_f$. On en déduit $\mathrm{X}\pi_f'$ est annulateur de f d'où $\pi_f | \mathrm{X}\pi_f'$. Or, les polynômes ont même degré avec π_f unitaire d'où $\mathrm{X}\pi_f' = d\pi_f$ notant $d = \deg \pi_f$. On résout l'équation différentielle $x' - \dfrac{d}{t} x = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on trouve la droite $\operatorname{Vect}(t \mapsto t^d)$ comme espace de solutions. Ainsi, on a $\pi_f = \mathrm{X}^d$ ce qui prouve que f est nilpotent.

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose qu'il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,(X) = r \geqslant 1$ tel que $AX = XB$. Montrer que χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré r.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que, pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX - XB = M$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admette une unique solution.

Corrigé : 1. Comme $\mathrm{rg}\,(X) = r$, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $X = PJ_rQ$ d'où

$$A'J_r = J_rB' \quad \text{avec} \quad A' = P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} A'_1 & A'_2 \\ \hline A'_3 & A'_4 \end{array}\right) \qquad B' = Q^{-1}BQ = \left(\begin{array}{c|c} B'_1 & B'_2 \\ \hline B'_3 & B'_4 \end{array}\right)$$

Ainsi
$$\left(\begin{array}{c|c} A'_1 & 0 \\ \hline A'_3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B'_1 & B'_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

d'où
$$A'_1 = B'_1 \quad \text{et} \quad A'_3 = 0 \qquad B'_2 = 0$$

Par conséquent
$$A = \left(\begin{array}{c|c} A'_1 & A'_2 \\ \hline 0 & A'_4 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B'_1 & 0 \\ \hline B'_3 & B'_4 \end{array}\right)$$

Ainsi
$$\chi_{A'_1} | \chi_{A'} \qquad \chi_{B'_1} | \chi_{B'} \quad \text{et} \quad \chi_{A'_1} = \chi_{B'_1}$$

Comme on a $\chi_A = \chi_{A'}$ et $\chi_B = \chi_{B'}$, on conclut

$$\boxed{\text{Les polynômes } \chi_A \text{ et } \chi_B \text{ ont un facteur commun de degré } r.}$$

2. On choisit $A = 0$ et $B = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1}$ d'où $\chi_A = \chi_B = X^n$. On a $XB = 0$ d'où $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Ker}\, X$ et $\mathrm{rg}\,(B) = n - 1$ d'où $\mathrm{rg}\,(X) \leqslant 1$. Pour $\mathrm{rg}\,(X) \geqslant 2$, on conclut

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

3. On pose
$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \Phi(X) = AX - XB$$

On a clairement $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ et on cherche donc une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit bijective, c'est-à-dire Φ injective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie. Si $\mathrm{Ker}\, \Phi \neq \{0\}$, alors il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AX = XB$. Par conséquent, les polynômes χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré $\mathrm{rg}\,(X) \geqslant 1$ et donc une racine commune (ce facteur est scindé dans $\mathbb{C}[X]$). Il en résulte que $\mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B) \neq \varnothing$. Ainsi, la condition $\mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B) = \varnothing$ est nécessaire pour Φ bijective. Supposons $\mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B) \neq \varnothing$. En remarquant $\mathrm{Sp}\,(B) = \mathrm{Sp}\,(B^\top)$, on prend U et V matrices colonnes non nulles telles que $AU = \lambda U$ et $B^\top V = \lambda V$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B)$. Alors, posant $X = UV^\top$, on a bien $X \neq 0$ et on trouve $\Phi(X) = 0$. On conclut

$$\boxed{\Phi \in \mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) \iff \mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B) = \varnothing}$$

Remarque : On observe qu'on ne peut pas trouver de contre-exemple à la question précédente pour $\mathrm{rg}\,(X) = 1$ puisque si les polynômes χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré 1, autrement dit si $\mathrm{Sp}\,(A) \cap \mathrm{Sp}\,(B) \neq \varnothing$, alors on sait construire X avec $\mathrm{rg}\,(X) = 1$ vérifiant $AX = XB$.

Exercice 8 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une valeur propre complexe non réelle, alors il existe un plan vectoriel stable par A.

Corrigé : Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que $AX = \lambda X$. On note $X_1 = \text{Re } X$, $X_2 = \text{Im } X$, $\lambda_1 = \text{Re } \lambda$ et $\lambda_2 = \text{Im } \lambda$. On a

$$AX = \lambda X \iff AX_1 + iAX_2 = (\lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2) + i(\lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2)$$

$$\iff \begin{cases} AX_1 = \lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2 \\ AX_2 = \lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2 \end{cases}$$

Justifions enfin que (X_1, X_2) est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit α, β des réels tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0$. On a

$$\alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha \frac{X + \bar{X}}{2} + \beta \frac{X - \bar{X}}{2i} = 0 \iff \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i}\right) X + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i}\right) \bar{X} = 0$$

Or, la famille $(X, \bar{X})$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ puisqu'on a $AX = \lambda X$ et passant au conjugué $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ avec $\lambda \neq \bar{\lambda}$ et il s'agit donc d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On en déduit

$$\begin{cases} \alpha - i\beta = 0 \\ \alpha + i\beta = 0 \end{cases}$$

et il s'agit d'un système de Cramer d'où $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, la famille (X_1, X_2) est libre et le plan vectoriel $\text{Vect}\,(X_1, X_2)$ est donc stable par A d'où

Il existe un plan vectoriel stable par A.

Exercice 9 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad |a_{i,i}| > R_i \quad \text{avec} \quad R_i = \sum_{j \in [\![1\,;\, n]\!] \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$

   Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour $(a, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, on note $D_f(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant R\}$. Montrer

$$\text{Sp}\,(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_f(a_{i,i}, R_i)$$

   Les ensembles $D_f(a_{i,i}, R_i)$ sont appelés *disques de Gerschgorin.*

Corrigé : 1. Une telle matrice est dite à *diagonale dominante stricte.* Supposons que $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$, autrement dit on dispose de $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$ telle que $AX = 0$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec les $x_i \in \mathbb{K}$. Comme $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, alors on dispose de $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1\,;\, n]\!]} |x_i| > 0$$

Si ce maximum était nul, toutes les coordonnées de X seraient nulles ce qui contredirait l'hypothèse X non nulle. Par ailleurs, la i_0-ème ligne de AX est nulle donc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0 \iff a_{i_0,i_0}x_{i_0} + \sum_{j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\setminus\{i_0\}} a_{i_0,j}x_j = 0$$
$$\iff |a_{i_0,i_0}| = \left|\sum_{j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\setminus\{i_0\}} a_{i_0,j}\frac{x_j}{|x_{i_0}|}\right|$$

la division par $|x_{i_0}|$ étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de $|x_{i_0}| = \underset{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}{\mathrm{Max}}\,|x_i|$, il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\setminus\{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\setminus\{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A. Ainsi

$$\forall \mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{AX}=0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{X}=0$$

d'où $\boxed{\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$

Remarque : Ce résultat est souvent référencé sous l'intitulé *lemme d'Hadamard.*

2. Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. Par suite $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n\notin\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ d'où la négation du caractère à diagonale dominante stricte, *i.e.*

$$\exists i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!] \quad | \quad |a_{i,i}-\lambda|\leqslant \mathrm{R}_i$$

Autrement dit $\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\subset\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{D}_f(a_{i,i},\mathrm{R}_i)}$

On a localisé le spectre dans les disques dits de *Gershgorin.*

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{A}=\left(a_{i,j}\right)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j}>0$ pour tout $(i,j)\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]^2$ et vérifiant $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$.

1. Montrer que $1\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$.
2. Montrer que si $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, alors $|\lambda|\leqslant 1$.
3. Établir que si $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(\mathrm{A})\cap\mathbb{U}$, alors $\lambda=1$.

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{U}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne constituée de 1. On a clairement $\mathrm{AU}=\mathrm{U}$ et $\mathrm{U}\neq 0$ d'où

$$\boxed{1\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$$

2. Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}=\left(x_i\right)\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$ tel que $\mathrm{AX}=\lambda\mathrm{X}$. On note $k_0\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$ tel que $|x_{k_0}|=\underset{k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}{\mathrm{Max}}\,|x_k|$. On a

$$\mathrm{AX}=\lambda\mathrm{X} \iff \forall i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j=\lambda x_i$$

En particulier pour $i=k_0$, en utilisant le fait que $|x_{k_0}|\neq 0$, il vient

$$|\lambda| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\left|\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}$$

Ainsi $$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| \leqslant 1}$$

3. Si $|\lambda| = 1$, en reprenant l'encadrement établi à la question précédente, on a

$$|\lambda| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\left|\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} = 1 = |\lambda|$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire est une égalité et on dispose donc de θ réel tel que

$$\forall j \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \qquad x_j = x_{k_0}\left|\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |x_j|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \theta + \arg x_{k_0}$$

En reprenant la k_0-ème ligne de l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$, on obtient

$$\lambda\,|x_{k_0}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\,|x_j|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{|x_{k_0}|}\sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\,|x_j| > 0$$

Par suite, on a $\lambda = |\lambda| = 1$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{U} = \{1\}}$$