EM-2 : Magnétostatique

I Courant électrique . . . 3
I.1 Intensité (Rappel) . . . 3
I.2 Densité volumique de courant . . . 3
I.3 Densité surfacique de courant . . . 7
I.4 Modèle du circuit filiforme . . . 7
II Propriétés du champ magnétique . . . 9
II.1 Forces de Laplace (Rappel) . . . 9
II.2 Symétries et invariances . . . 9
II.3 Flux du champ magnétique : flux conservatif . . . 11
II.4 Circulation et théorème d'Ampère . . . 13
III Étude de distributions à haut degré de symétrie . . . 15
III.1 Méthode . . . 15
III.2 Fil infini . . . 15
III.3 Fil cylindrique . . . 15
III.4 Solénoïde infini . . . 17
IV Lecture de cartes de champ . . . 17
IV.1 Propriétés . . . 17
IV.2 Exemple . . . 17

MP 2026-2027
Aurore Mangin

Chapitre EM-2

Magnétostatique

La magnétostatique étudie le champ magnétique créé par des courants indépendants du temps, donc en régime stationnaire. Nous verrons que c'est un cas singulier de l'électromagnétisme.

I Courant électrique

I.1 Intensité (Rappel)

Vous avez vu en MPSI que l'existence d'un courant électrique est liée au déplacement de porteurs de charges. Dans un métal, il s'agit d'électrons de conduction, dans un électrolyte ce sont des ions (cations et anions).

Définition n°1 Intensité électrique

Soit S une surface orientée selon la normale $\vec{n}$ à cette surface. L'intensité du courant i est le rapport de la charge élémentaire $\mathrm{d}q$ avec $\mathrm{d}t$

$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$$

avec $\mathrm{d}q$ la charge algébrique élémentaire traversant la surface S pendant la durée $\mathrm{d}t$ dans le sens de $\vec{n}$. L'intensité est un débit de charges et s'exprime en ampère (A).

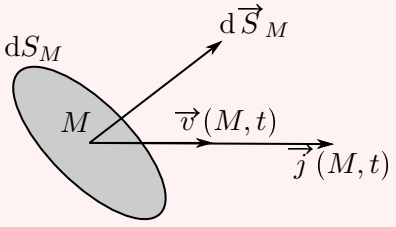
I.2 Densité volumique de courant

Le courant électrique est une grandeur macroscopique correspondant à un mouvement d'ensemble de particules chargées. On définit un **vecteur densité de courant électrique** décrivant ce transport à **l'échelle mésoscopique.**

Définition n°2 Vecteur densité de courant volumique

On définit le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M,t)$ tel que la charge élémentaire qui traverse la surface orientée $\mathrm{d}\vec{S}_M$ pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\mathrm{d}^2q(M,t) = \vec{j}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_M \, \mathrm{d}t$$



$\vec{j}(M,t)$ est en $\mathrm{A\,m^{-2}}$.

Dans le cas où il n'y a qu'un seul type de porteur de charge, on a

$$\boxed{\vec{j}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}(M,t)}$$

avec $\rho(M,t)$ la densité volumique de charges.

S'il y a plusieurs porteurs de charge numérotés i, alors $\boxed{\vec{j}(M,t) = \sum_i [\rho_i(M,t)\vec{v}_i(M,t)]}$.

Remarque : La notation d^2 indique une grandeur élémentaire vis à vis des coordonnées d'espace et du temps.
Remarque : Dans le cas d'un métal, les porteurs de charge sont les électrons de conduction dans le référentiel lié au réseau. Donc

$$\vec{j}(M,t) = \rho_{\mathrm{el}}(M,t)\,\vec{v}_{\mathrm{el}}(M,t)$$

Dans le cas d'un électrolyte contenant des anions A^- et des cations B^+, on a

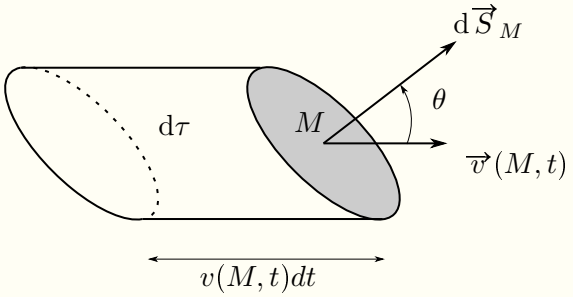
$$\vec{j}(M,t) = \rho_{\mathrm{A}^-}(M,t)\,\vec{v}_{\mathrm{A}^-}(M,t) + \rho_{\mathrm{B}^+}(M,t)\,\vec{v}_{\mathrm{B}^+}(M,t)$$

Remarque : La densité volumique de charges peut s'exprimer en fonction de la densité de charges $n = \mathrm{d}N/\mathrm{d}\tau$ et de la charge q d'un porteur :

$$\boxed{\rho(M,t) = n(M,t)q}$$

Demonstration

Considérons une surface élémentaire $\mathrm{d}S_M$ centrée en M et orientée selon le vecteur normal $\mathrm{d}\vec{S}_M$.



Dénombrons les charges $\mathrm{d}^2q(M,t)$ traversant la surface $\mathrm{d}S_M$ pendant $\mathrm{d}t$. Pour simplifier, nous considérons un seul type de porteur de charge caractérisé par une charge volumique $\rho(M,t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$, avec $\mathrm{d}\tau$ un volume mésoscopique. Dans le volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$ autour de M, les charges se déplacent à la vitesse moyenne $\vec{v}(M,t)$ (moyenne sur les $\mathrm{d}N$ particules du volume $\mathrm{d}\tau$).

1. Exprimer le volume $\mathrm{d}\tau$ dans lequel appartiennent les charges qui traversent la surface $\mathrm{d}S_M$ pendant $\mathrm{d}t$.
2. En déduire la charge élémentaire d^2q traversant $\mathrm{d}S_M$ pendant $\mathrm{d}t$. Définir alors $\vec{j}(M,t)$.

Définition n°3 Lien entre I et $\vec{j}$

L'intensité électrique correspondant au débit de charges à travers une surface macroscopique Σ s'écrit

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \iint_{M\in\Sigma} \vec{j}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M}$$

Il s'agit du **flux du vecteur densité de courant** à travers la surface Σ orientée.

Demonstration

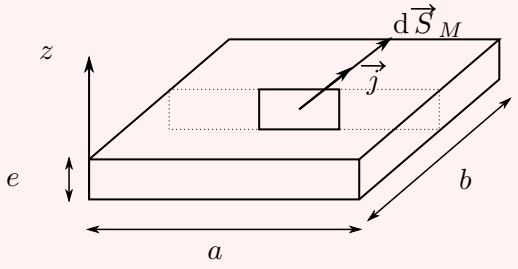
1. Démontrer cette relation.

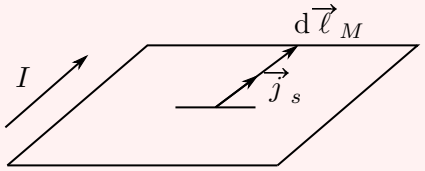
Remarque : En régime stationnaire $\vec{j}$ est indépendant du temps, donc I aussi.

I.3 Densité surfacique de courant

Définition n°4 Densité surfacique de courant

Lorsque les courants sont localisés au voisinage d'une surface, on peut les décrire au moyen d'une modélisation surfacique. C'est la limite d'une distribution volumique où les courants sont répartis sur une petite épaisseur e sous la surface.





On définit alors une densité surfacique de courant

$$\overrightarrow{j}_s(M,t) = \int_{z=0}^{z=e} \overrightarrow{j}(M,t)\mathrm{d}z$$

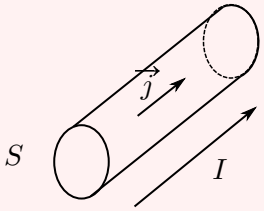
Application n°1 : Passage à une distribution surfacique : nappe de courant ✍

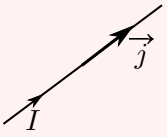
1. Établir la relation entre $\overrightarrow{j}_s$ et $\overrightarrow{j}$.

I.4 Modèle du circuit filiforme

Définition n°5 Distributions filiformes

Dans le cas de conducteurs filiformes, $\overrightarrow{j}(M,t)$ est tangent au conducteur au point M, et dans le même sens que I.
Cette situation correspond au cas limite d'une distribution cylindrique dont la section tend vers zéro.





II Propriétés du champ magnétique

II.1 Forces de Laplace (Rappel)

Définition n°6 Force de Lorentz

La force de Lorentz correspond à la force électromagnétique s'exerçant sur une charge ponctuelle q et de vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{F}(M) = q\left(\vec{E}(M) + \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)\right)$$

Dans le cas d'une distribution volumique de charges, le force électromagnétique élémentaire qui s'exerce sur un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ mésoscopique s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{F}(M) &= \mathrm{d}q_{\text{totale}}\,\vec{E}(M) + \mathrm{d}q_{\text{mobiles}}\,\vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)\\ &= (\rho_{\text{totale}}\,\vec{E}(M) + \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M))\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

avec $\vec{v}(M)$ la vitesse moyenne des charges mobiles du volume $\mathrm{d}\tau$.

Remarque : Dans un matériau globalement neutre $\rho_{\text{totale}} = 0$, il ne reste donc que le terme magnétique.

Demonstration ✍

1. Établir la force de Lorentz élémentaire s'exerçant sur un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$.

Définition n°7 Force de Laplace

La force de Laplace est la force magnétique qui s'exerce sur un conducteur parcouru par un courant. La force élémentaire pour une distribution volumique de charges s'écrit

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}(M) = \vec{j}(M)\mathrm{d}\tau \wedge \vec{B}(M)}$$

La force élémentaire pour un conducteur filiforme s'écrit

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}(M) = i\mathrm{d}\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)}$$

avec $\mathrm{d}\vec{\ell}_M$ le déplacement élémentaire des porteurs de charges mobiles, colinéaire au conducteur et dans le sens de i.

II.2 Symétries et invariances

Définition n°8 Principe de Curie

D'après le principe de de Curie, le champ magnétique a les mêmes propriétés de symétrie et d'invariances que ses sources : la distribution de courants en magnétostatique.

Remarque : On verra en électromagnétisme, qu'un champ électrique dépendant du temps peut générer un champ magnétique.

Définition n°9 Symétrie et antisymétrie de $\overrightarrow{B}$

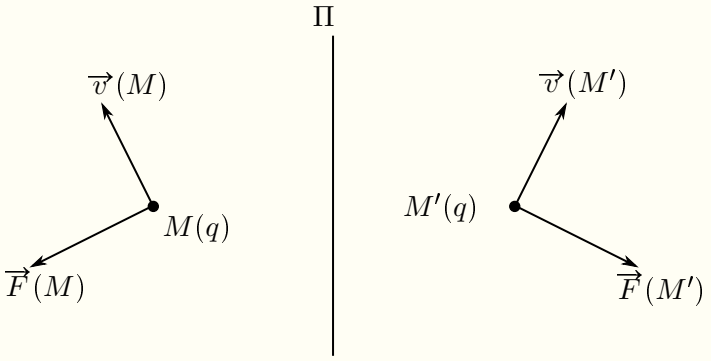
Le champ magnétique est un pseudo-vecteur car il se comporte comme un produit vectoriel entre deux « vrais » vecteurs $\overrightarrow{j}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$. Il aura donc la propriété d'antisymétrie du produit vectoriel.
Soit Π un plan de symétrie de la distribution de courant $\overrightarrow{j}$, alors c'est un plan d'antisymétrie du champ $\overrightarrow{B}$.
Soit Π^* un plan d'antisymétrie de la distribution de courant $\overrightarrow{j}$, alors c'est un plan de symétrie du champ $\overrightarrow{B}$.
Par conséquent, $\overrightarrow{B}(M)$ est perpendiculaire à tous les plans de symétrie de la distribution de courants **passant par** M, et $\overrightarrow{B}(M)$ est contenu dans tous les plans d'antisymétrie de la distribution de courants **passant par** M**.**

Demonstration ✍

1. On veut justifier le caractère antisymétrique de $\overrightarrow{B}$ vis à vis du vecteur densité de courant $\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$. Pour cela, on considère une charge $q > 0$ en M de vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$. La force qui s'exerce sur cette particule est

$$\overrightarrow{F}(M) = q\overrightarrow{v}(M) \wedge \overrightarrow{B}(M)$$

On envisage la situation symétrique par rapport à un plan Π. Π est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc de $q\overrightarrow{v}$. De même $\overrightarrow{F}(M')$ est le symétrique de $\overrightarrow{F}(M)$. Compléter la figure en plaçant $\overrightarrow{B}(M)$ et $\overrightarrow{B}(M')$. Commenter.



Application n°2 : Fil infini ✍

Soit un fil infini d'axe Oz parcouru par un courant d'intensité i constant.

1. Déterminer la direction et les coordonnées dont dépend $\overrightarrow{B}(M)$ en un point M quelconque.

II.3 Flux du champ magnétique : flux conservatif

Définition n°10 Champ $\overrightarrow{B}$ à flux conservatif

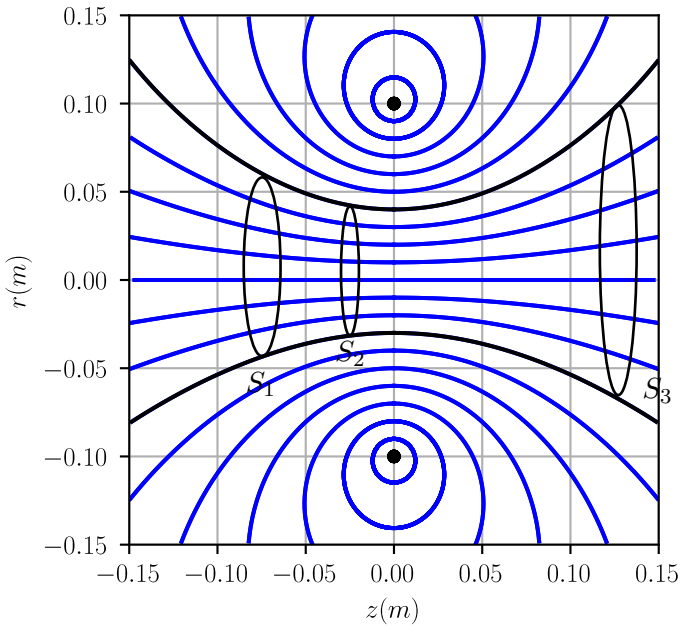
On montrera dans le chapitre EM-4 que le champ magnétique est à flux conservatif, i.e. que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée est nul :

$$\boxed{\oiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{B}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_M = 0}$$

Une conséquence est que le long d'un tube de champ, le flux du champ magnétique à travers une section se conserve. Donc le champ est plus intense là où les lignes de champ sont plus resserrées.

Demonstration ✍

On considère le champ créé par une spire d'axe (Oz), de rayon $R = 10\,\text{cm}$. On trace les lignes de champ :



1. Orienter la spire et les lignes de champ.
2. On considère le tube de champ représenté. Montrer que le flux du champ magnétique à travers une section du tube se conserve.

II.4 Circulation et théorème d'Ampère

Définition n°11 Théorème d'Ampère

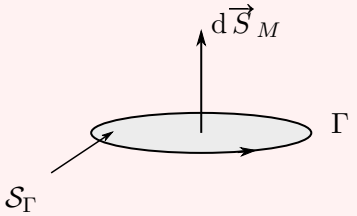
D'après le théorème d'Ampère, la circulation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le vide le long d'un contour fermé et orienté Γ est égale à l'intensité enlacée multipliée par la perméabilité magnétique du vide μ_0 :

$$\oint_{M\in\Gamma} \overrightarrow{B}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M = \mu_0\, i_{\text{enlacée}}$$

avec

- $\mu = 4\pi\,10^{-7}\text{SI}$ la perméabilité magnétique du vide ;
- $i_{\text{enlacée}}$ est l'intensité du courant par le contour d'Ampère Γ. C'est l'intégrale du vecteur densité de courant à travers une surface $\mathcal{S}_\Gamma$ qui s'appuie sur Γ et orientée corrélativement avec Γ :

$$i_{\text{enlacée}} = \iint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \overrightarrow{j}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$$



Remarque : On peut montrer que le choix de la surface $\mathcal{S}_\Gamma$ n'a pas d'importance. Il faut juste qu'elle s'appuie sur Γ.

III Étude de distributions à haut degré de symétrie

III.1 Méthode

Pour pouvoir déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère, il faut pouvoir expliciter facilement la circulation du champ magnétique. Ceci n'est possible que si on peut déterminer la direction et la coordonnée dont dépendra le champ grâce à l'étude des symétries et des invariances. Il faut que la distribution de courants soit à haut degré de symétrie.

La méthode sera analogue à celle pour l'utilisation du théorème de Gauss :

- étudier les symétries et les invariances de la distribution de courants et en déduire des propriétés de $\vec{B}$;
- choisir un contour d'Ampère Γ tel que $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M$ soit nul ou constant sur le contour ;
- exprimer la circulation sur le contour fermé ;
- exprimer l'intensité du courant enlacé ;
- appliquer le théorème d'Ampère et en déduire l'expression de $\vec{B}(M)$.

Remarque : Il est possible de décomposer la distribution de courants et appliquer le principe de superposition.

III.2 Fil infini

Application n°3 : Fil infini (♥ CE ♥) ✍

Soit un fil infini d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité I.

1. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace. Quelle est l'allure des lignes de champ ? Le champ magnétique est-il défini en $r = 0$?

III.3 Fil cylindrique

Application n°4 : Cylindre infini (♥ CE ♥) ✍

On considère un fil infini de section non nulle, soit un cylindre d'axe (Oz), de rayon R et parcouru par un vecteur densité de courant $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z = \overrightarrow{\text{cste}}$. Le fil est parcouru par un courant I.

1. Exprimer j_0 en fonction de I et R.
2. Déterminer l'expression du champ $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace. Le champ magnétique est-il continu ?

III.4 Solénoïde infini

Application n°5 : Solénoïde infini (♥ CE ♥) ✍

On considère un solénoïde infini d'axe (Oz), de rayon R, constitué de n spires par unité de longueur et parcourues par un courant d'intensité I.
On suppose que le champ est nul à l'extérieur du solenoïde.

1. Établir l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. Commenter.

IV Lecture de cartes de champ

On rappelle quelques ordres de grandeur de champ magnétique à connaitre :

- champ magnétique terrestre : $5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde : $10^{-2} - 10^{-3}\mathrm{T}$
- champ magnétique d'un aimant : $0,1 - 1\mathrm{T}$
- champ magnétique créé par un électroaimant : qqs teslas

IV.1 Propriétés

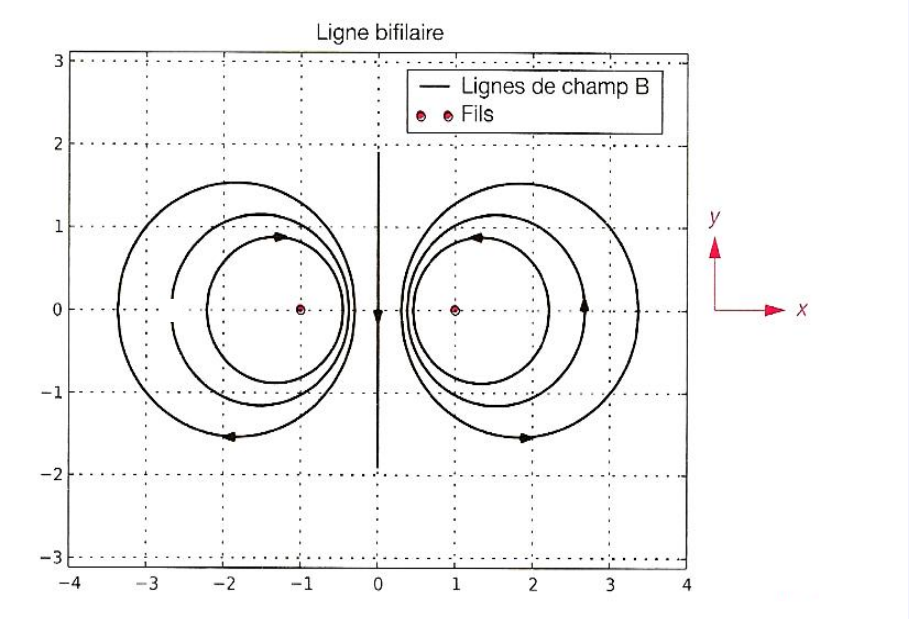
Définition n°12 Propriétés des lignes de champ magnétique

Les lignes de champ magnétique sont toujours fermées et entourent les sources.
Le long d'une ligne de champ, la norme du champ magnétique décroit quand les lignes de champ s'écartent et augmente quand les lignes de champ se rapprochent.

IV.2 Exemple

Application n°6 : Ligne bifilaire ✍

On considère une ligne bifilaire, constituée par deux fils rectilignes infinis parallèles et parcourus par des courants i de même intensité mais de sens contraire.
On donne la cartographie du champ magnétique :



1. Déterminer l'orientation des courants sur la figure.

2. Expliquer pourquoi les lignes de champ sont contenues dans le plan (Oxy). Expliquer pourquoi (Oy) est une ligne de champ magnétique.
3. Où le champ est-il le plus intense ?