TOPOLOGIE, CONTINUITÉ

B. Landelle

Table des matières

I Topologie d'un espace normé **2**
1 Boules, sphères . . . 2
2 Ouverts, fermés . . . 3
3 Intérieur, adhérence, frontière . . . 5
4 Topologie relative . . . 10

II Limites **11**
1 Définitions . . . 11
2 Dimension finie ou espace produit . . . 13
3 Opérations algébriques . . . 13

III Continuité **14**
1 Définitions, propriétés . . . 14
2 Uniforme continuité . . . 15
3 Opérations algébriques . . . 17
4 Applications linéaires, multilinéaires continues . . . 20

IV Compacité **22**
1 Définitions, propriétés . . . 22
2 Continuité et compacité . . . 24
3 Compacité en dimension finie . . . 25

V Connexité par arcs **27**
1 Définitions . . . 27
2 Propriétés . . . 28
3 Continuité et connexité par arcs . . . 30

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$-ev normé avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ avec A non vide. Si la partie A est minorée, elle possède une borne inférieure m caractérisée par

$$\forall x \in A \qquad m \leqslant x \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists a \in A \quad | \quad a < m + \varepsilon$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists a_n \in A \quad | \quad \inf A \leqslant a_n < \inf A + \frac{1}{2^n}$$

Ainsi, il existe $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf A$. De même, si la partie A est majorée, il existe une suite à valeurs dans A convergente de limite $\sup A$.

I Topologie d'un espace normé

1 Boules, sphères

Définition 1. *Soit $a \in E$ et $r > 0$. On appelle* boule ouverte *de centre a de rayon r l'ensemble noté $B(a,r)$ défini par*

$$B(a,r) = \{x \in E \ : \ \|x - a\| < r\}$$

Exemples : 1. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, on a $B(a,r) =]\,a-r\,;a+r\,[$.
2. Dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, on a $B(a,r) = D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-a| < r\}$ disque ouvert de centre a de rayon r.

Définition 2. *Soit $a \in E$ et $r \geqslant 0$. On appelle* boule fermée *de centre a de rayon r l'ensemble noté $B_f(a,r)$ défini par*

$$B_f(a,r) = \{x \in E \ : \ \|x - a\| \leqslant r\}$$

On appelle sphère *de centre a de rayon r l'ensemble noté $S(a,r)$ défini par*

$$S(a,r) = \{x \in E \ : \ \|x - a\| = r\}$$

Remarque : La boule fermée $B_f(a,0)$ et la sphère $S(a,0)$ sont réduites au singleton $\{a\}$.

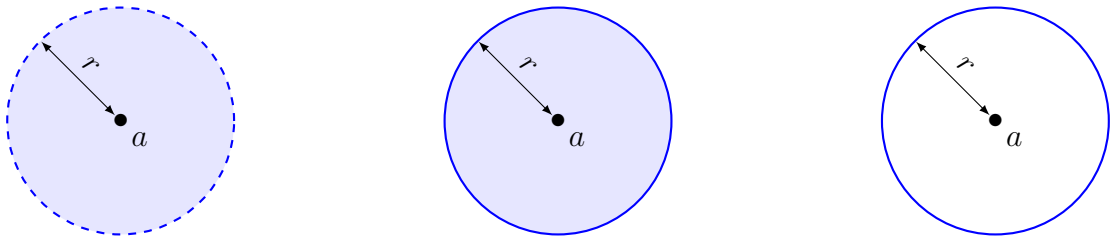


FIGURE 1 – Boule ouverte $B(a,r)$, boule fermée $B_f(a,r)$, sphère $S(a,r)$

Exemples : 1. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, pour a réel et $r > 0$, on a $B_f(a,r) = [\,a-r\,;a+r\,]$.
2. Dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, pour a complexe et $r > 0$, on a $B_f(a,r) = D_f(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-a| \leqslant r\}$ disque fermé de centre a de rayon r.

Proposition 1. *Les boules et sphères sont des parties bornées de* E.

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{B}(a,r)$. On a

$$\|x\| \leqslant \|x-a\| + \|a\| \leqslant r + \|a\|$$

De même pour les boules fermées et les sphères. □

Proposition 2. *Toute boule ouverte ou fermée est convexe.*

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{E}$, $r > 0$ et $(x,y) \in \mathrm{B}(a,r)^2$. Pour $\lambda \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y - a\| = \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\| \leqslant \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\| < \lambda r + (1-\lambda)r = r$$

La preuve est identique dans le cas d'une boule fermée. □

2 Ouverts, fermés

Définition 3. *Une partie* U *de* E *est dite* ouverte *(ou est un* ouvert*) si*

$$\forall a \in \mathrm{U} \qquad \exists r > 0 \quad | \quad \mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{U}$$

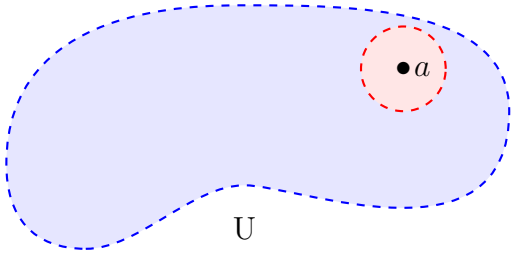


FIGURE 2 – Ouvert U contentant a

Exemples : 1. L'ensemble vide et E sont des ouverts. Pour E c'est immédiat, pour l'ensemble vide, c'est vrai puisque l'assertion « $\forall x \in \varnothing\ \mathscr{P}(x)$ » est toujours vraie.
2. Les intervalles ouverts (de la forme $\mathbb{R}$ ou $]\,a\,;b\,[$ ou $]\,a\,;+\infty\,[$ ou $]\,-\infty\,;a\,[$ avec a,b réels) sont des ouverts.

Proposition 3. *Toute boule ouverte de* E *est un ouvert.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{B}(a,r)$ On pose $\delta = r - \|x-a\| > 0$. Pour $y \in \mathrm{B}(x,\delta)$, on a

$$\|y-a\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| < \delta + \|x-a\| = r$$

autrement dit

$$\mathrm{B}(x,\delta) \subset \mathrm{B}(a,r)$$

□

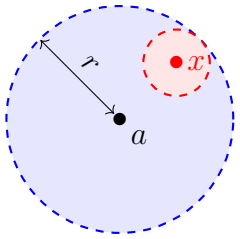


FIGURE 3 – Boule ouverte $\mathrm{B}(a,r)$

Proposition 4. *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration. Soit $(\mathrm{V}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'ouverts. Soit $a \in \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{V}_i$. Donc il existe $j \in \mathrm{I}$ tel que $a \in \mathrm{V}_j$ et par conséquent, il existe $r > 0$ tel que

$$\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{V}_j \subset \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{V}_i$$

□

Exemple : On a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\,k\,;k+1\,[$ union d'ouverts d'où $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ouvert.

Proposition 5. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration. Soit $(\mathrm{U}_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une famille finie d'ouverts et soit $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i$. On a

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad \exists r_i > 0 \quad | \quad \mathrm{B}(a,r_i) \subset \mathrm{U}_i$$

On pose $r = \min_{i\in[\![1\,;n]\!]} r_i$. On a bien $r>0$ et par ailleurs

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad \mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}(a,r_i) \subset \mathrm{U}_i \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B}(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i$$

Ce qui prouve le résultat attendu. □

Remarque : Le résultat est faux pour une intersection quelconque d'ouverts. Par exemple, dans $(\mathbb{R},|\ |)$, en considérant $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant 1}$ avec $\mathrm{U}_n = \left]-\dfrac{1}{n}\,;\dfrac{1}{n}\right[$ et $\bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{U}_n = \{0\}$ qui n'est pas ouvert.

Définition 4. *Une partie* F *de* E *est dite* fermée *(ou est un* fermé*) si son complémentaire est un ouvert.*

Exemples : 1. Les ensembles E et $\varnothing$ sont des fermés de E.
2. Les intervalles fermés (segments ou de la forme $[\,a\,;+\infty\,[$ ou $]\,-\infty\,;a\,]$ avec a réel ou $\mathbb{R}$) sont des fermés de $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque : Des parties peuvent n'être ni ouvertes, ni fermées. Par exemple, dans $(\mathbb{R},|\ |)$, l'intervalle $[\,0\,;1\,[$ n'est pas ouvert puisque $\mathrm{B}(0,\varepsilon) =]\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,[\not\subset [\,0\,;1\,[$ et n'est pas fermé puisque $\mathrm{B}(1,\varepsilon) =]\,1-\varepsilon\,;1+\varepsilon\,[\not\subset \mathbb{R}\setminus[\,0\,;1\,[$.

Proposition 6. *Toute boule fermée est un fermé.*

Démonstration. Soit $x \notin \mathrm{B}_f(a,r)$. On pose $\delta = \|x-a\| - r$. On a $\delta > 0$. Pour $y \in \mathrm{B}(x,\delta)$, il vient par inégalité triangulaire inverse

$$\|y-a\| \geqslant |\|y-x\| - \|x-a\|| > \|x-a\| - \delta = r$$

ce qui prouve

$$\mathrm{B}(x,\delta) \subset \mathrm{E}\setminus \mathrm{B}_f(a,r)$$

□

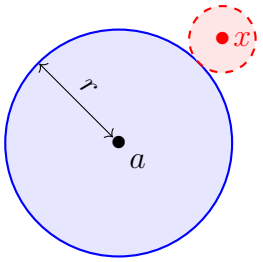


FIGURE 4 – Boule fermée $\mathrm{B}_f(a,r)$

Proposition 7. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Démonstration. Immédiat par complémentation. □

Proposition 8. *Toute sphère est un fermé.*

Démonstration. On a $\mathrm{S}(a,r) = \mathrm{B}_f(a,r) \cap (\mathrm{E}\setminus \mathrm{B}(a,r))$ et le résultat suit. □

Proposition 9. *Une union finie de fermés est un fermé.*

Démonstration. Immédiat par complémentation. □

Remarque : Le résultat est faux pour une union quelconque (prendre les complémentaires du contre-exemple pour une intersection quelconque d'ouverts ou aussi $\bigcup_{n\geqslant 1}\left[0\,;1-\dfrac{1}{n}\right]=[0\,;1[$ qui n'est pas fermé).

Définition 5. *Soit $a\in \mathrm{E}$. On appelle* voisinage *de a toute partie contenant un ouvert contenant a.*

Remarque : On peut remplacer « ouvert contenant » par « boule ouverte centrée en » dans la définition précédente.

3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 6. *Soit* A *une partie de* E. *Un point x est dit* intérieur *à* A *si* A *est un voisinage de x, i.e. s'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans* A.

Définition 7. *Soit* A *une partie de* E. *On appelle* intérieur *de* A *l'ensemble noté* $\mathring{\mathrm{A}}$ *des points intérieurs de* A.

Remarques : (1) On a $\mathring{\mathrm{E}}=\mathrm{E}$ et $\mathring{\varnothing}=\varnothing$.
(2) Pour $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$, on a $\mathring{\mathrm{A}}\subset\mathrm{A}$. En effet, si $x\in\mathring{\mathrm{A}}$, alors on dispose de $r>0$ tel que $\mathrm{B}(x,r)\subset\mathrm{A}$ d'où en particulier $x\in\mathrm{A}$.

Proposition 10. *Soit* A *une partie de* E. *On a*

$$\mathrm{A}\ \textit{ouvert}\iff \mathring{\mathrm{A}}=\mathrm{A}$$

Démonstration. On a
$$\mathrm{A}\text{ ouvert}\iff \forall x\in\mathrm{A}\quad \exists r>0\ \mid\ \mathrm{B}(x,r)\subset\mathrm{A}$$
$$\iff \forall x\in\mathrm{A}\quad x\in\mathring{\mathrm{A}}\iff \mathrm{A}\subset\mathring{\mathrm{A}}$$
L'autre inclusion étant immédiate, le résultat suit. □

Proposition 11. *Soit* A *une partie de* E. *L'intérieur* $\mathring{\mathrm{A}}$ *est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert inclus dans* A.

Démonstration. On a $x\in\mathring{\mathrm{A}}\iff \exists \mathrm{V}\text{ ouvert }\subset\mathrm{A}\ \mid\ x\in\mathrm{V}\iff x\in\displaystyle\bigcup_{\mathrm{V}\text{ ouvert }\subset\mathrm{A}}\mathrm{V}$

Ceci prouve que $\mathring{\mathrm{A}}=\displaystyle\bigcup_{\mathrm{V}\text{ ouvert }\subset\mathrm{A}}\mathrm{V}$ qui est le plus grand ouvert inclus dans A. □

Exemples : Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_2$. Pour $\mathrm{A}=]\,0\,;1\,[^2$, on a $\mathring{\mathrm{A}}=]\,0\,;1\,[^2$. Pour $\mathrm{B}=[\,0\,;1\,]^2$, on a $\mathring{\mathrm{B}}=]\,0\,;1\,[^2$. Pour $\mathrm{C}=[\,0\,;1\,[^2$, on a $\mathring{\mathrm{C}}=]\,0\,;1\,[^2$.

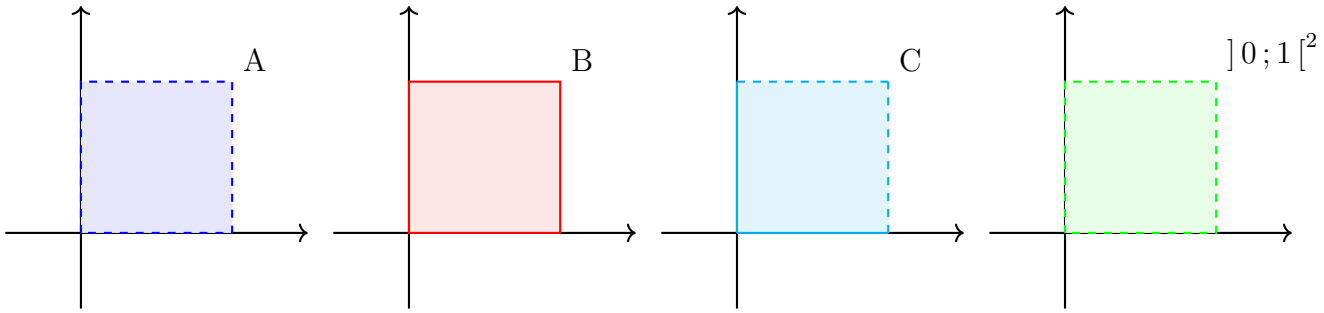


FIGURE 5 – Domaines A, B, C et $\mathring{\mathrm{A}} = \mathring{\mathrm{B}} = \mathring{\mathrm{C}}$

Définition 8. *Soit* A *une partie de* E. *Un point* x *est dit* point adhérent *à* A *si toute boule ouverte centrée en* x *rencontre* A.

Exemple : Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_2$

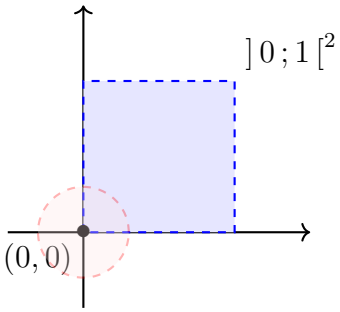


FIGURE 6 – $(0,0)$ adhérent à $]0;1[^2$

Définition 9. *Soit* A *une partie de* E. *On appelle* adhérence *de* A *l'ensemble noté* $\bar{\mathrm{A}}$ *des points adhérents de* A.

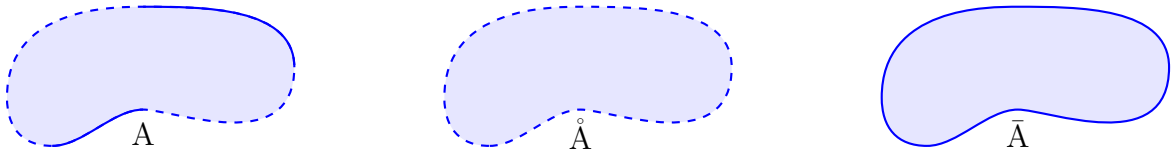


FIGURE 7 – Ensembles A, Å et $\bar{\mathrm{A}}$

Remarques : (1) On a $\bar{\mathrm{E}} = \mathrm{E}$ et $\bar{\varnothing} = \varnothing$.
(2) Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on a $\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$.
(3) Dans E un $\mathbb{K}$-ev normé, on a $\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \mathrm{B}_f(a,r)$ pour $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$. Ce résultat n'a plus lieu dans un espace seulement supposé métrique. En effet, considérant la distance discrète $\mathrm{d}(x,y) = 1 - \delta_{x,y}$ pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, pour $a \in \mathrm{E}$, on a $\overline{\mathrm{B}(a,1)} = \{a\}$ tandis que $\mathrm{B}_f(a,1) = \mathrm{E}$.

Exemple : Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_2$, $[0;1]^2$ est l'adhérence de $]0;1[^2$.



FIGURE 8 – Domaines $\mathrm{A} =]\,0\,;1\,[^2$ et $\bar{\mathrm{A}} = [\,0\,;1\,]^2$

Définition 10. *Soit* A *une partie de* E. *On dit que* A *est* dense *dans* E *si* $\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$.

Proposition 12. *Soit* A *une partie de* E *et* $(x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$. *Si* $(x_n)_n$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \bar{\mathrm{A}}$.

Démonstration. Supposons $(x_n)_n$ convergente et notons $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Soit $r > 0$. Comme $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe n entier tel que $\|x_n - x\| < r$ d'où $x_n \in \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{A}$ ce qui prouve $\mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$. □

Proposition 13 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence). *Soit* A *une partie de* E. *Pour* $x \in \mathrm{E}$, *on a*

$$x \in \bar{\mathrm{A}} \iff \exists (x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}} \quad | \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Démonstration. Soit $x \in \bar{\mathrm{A}}$. On a $\mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$ donc en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}(x, \tfrac{1}{2^n}) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \exists (x_n)_{\in} \mathrm{A}^{\mathbb{N}} \quad | \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

□

Exemple : Avec $\mathrm{A} =]\,0\,;1\,[$, on a $\bar{\mathrm{A}} = [\,0\,;1\,]$. En considérant $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, on trouve $[\,0\,;1\,] \subset \bar{\mathrm{A}}$ et si $x \in \bar{\mathrm{A}}$, il existe $(x_n)_n \in]\,0\,;1\,[^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et comme $0 < x_n < 1$ pour n entier, il vient par passage à la limite $0 \leqslant x \leqslant 1$, *i.e.* $\bar{\mathrm{A}} \subset [\,0\,;1\,]$ d'où l'égalité.

Proposition 14 (Caractérisation métrique de l'adhérence). *Soit* A *une partie non vide de* E. *Pour* $x \in \mathrm{E}$, *on a*

$$x \in \bar{\mathrm{A}} \iff \mathrm{d}(x,\mathrm{A}) = 0$$

Démonstration. Par définition d'une borne inférieure, on a

$$\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists a \in \mathrm{A} \quad | \quad \|x - a\| < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$$

d'où le résultat.

Variante : Si $x \in \bar{\mathrm{A}}$, il existe $(x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{A}) \leqslant \|x - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Supposons $\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) = 0$. Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, on a

$$\exists (x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}} \quad | \quad \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{a\in \mathrm{A}} \|x-a\| = \mathrm{d}(x,\mathrm{A}) = 0$$

autrement dit
$$\exists (x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}} \quad | \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

□

Proposition 15. *Soit* A *une partie de* E. *On a*
$$\mathrm{A} \text{ fermé} \iff \mathrm{A} = \bar{\mathrm{A}}$$

Démonstration. On a
$$\begin{aligned} \mathrm{E}\setminus \mathrm{A} \text{ ouvert} &\iff \forall x \in \mathrm{E}\setminus \mathrm{A} \qquad \exists r>0 \quad | \quad \mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{E}\setminus \mathrm{A} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{E}\setminus \mathrm{A} \qquad x \in \mathrm{E}\setminus \bar{\mathrm{A}} \iff \bar{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A} \end{aligned}$$
L'autre inclusion étant immédiate, le résultat suit. □

Exemple : $\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$ puisque $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

Proposition 16 (Appartenance à un fermé). *Soit* F *un fermé non vide de* E. *Pour* $x \in \mathrm{E}$, *on a*
$$x \in \mathrm{F} \iff \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = 0$$

Démonstration. Conséquences des propositions 14 et 15. □

Théorème 1 (Caractérisation séquentielle d'un fermé). *Soit* F *partie de* E. *On a*
$$\mathrm{F} \text{ fermé de } \mathrm{E} \iff \left(\forall (x_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}} \quad (x_n)_n \text{ convergente} \implies \lim_{n\to+\infty} x_n \in \mathrm{F}\right)$$

Démonstration. Supposons F fermé. Soit $(x_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ avec $(x_n)_n$ convergente. D'après la proposition 12, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n \in \bar{\mathrm{F}}$ et le résultat suit d'après la proposition 15. Réciproquement, pour $x \in \bar{\mathrm{F}}$, on dispose d'une suite $(x_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et il s'ensuit $x \in \mathrm{F}$ d'où $\bar{\mathrm{F}} \subset \mathrm{F}$ et l'autre inclusion est immédiate. □

Exemple : Soit $(x_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Il existe un seuil N tel que $|x_n - x| < 1/2$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$ puis $|x_n - x_{\mathrm{N}}| < 1$ par inégalité triangulaire d'où $x_n = x_{\mathrm{N}}$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Ainsi, on a $x \in \mathbb{Z}$ d'où $\mathbb{Z}$ fermé.

Théorème 2. *Tout sev de dimension finie de* E *est un fermé.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ une base de F et $(x_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ convergente. Pour n entier, on a $x_n = \sum_{i=1}^{p} x_{i,n} e_i$ et $(x_n)_n$ converge si et seulement si $(x_{i,n})_n$ converge pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$. Alors, il vient
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{n\to+\infty} x_{i,n}\right) e_i \in \mathrm{F}$$
D'où le caractère fermé de F. □

Remarque : Le résultat est faux pour un sev de dimension infinie. Considérons $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \varphi(f) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad h_n(t) = 1 - (1-t)^n$$

L'application φ est clairement linéaire et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad h_n \in \operatorname{Ker}\varphi \quad \text{et} \quad \|h_n - \mathbb{1}\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $\operatorname{Ker}\varphi$, convergente de limite $\mathbb{1}$ qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker}\varphi$ ce qui prouve que $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas fermé.

Proposition 17. *Soit* A *une partie de* E. *L'adhérence* $\bar{\mathrm{A}}$ *est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant* A.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} x \notin \bar{\mathrm{A}} &\iff \exists r > 0 \quad | \quad \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{A} = \varnothing \\ &\iff \exists \mathrm{U} \text{ ouvert } \subset \mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \quad | \quad x \in \mathrm{U} \end{aligned}$$

Par négation, il vient

$$\begin{aligned} x \in \bar{\mathrm{A}} &\iff \forall \mathrm{U} \text{ ouvert } \subset \mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \qquad x \notin \mathrm{U} \\ &\iff \forall \mathrm{F} \text{ fermé } \supset \mathrm{A} \qquad x \in \mathrm{F} \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\bar{\mathrm{A}} = \displaystyle\bigcap_{\mathrm{F}\text{ fermé }\supset \mathrm{A}} \mathrm{F}$ qui est le plus petit fermé contenant A. □

Définition 11. *Soit* A *une partie de* E. *On appelle* frontière *de* A *notée* $\partial\mathrm{A}$ *l'ensemble des points* x *de* E *tels que toute boule ouverte centrée en* x *rencontre à la fois* A *et* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.

Proposition 18. *Soit* A *une partie de* E. *On a* $\partial\mathrm{A} = \bar{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a

$$x \in \bar{\mathrm{A}} \iff \forall r > 0 \qquad \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$$

et

$$x \notin \mathring{\mathrm{A}} \iff \forall r > 0 \qquad \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \neq \varnothing$$

d'où le résultat. □



FIGURE 9 – Ensembles A et ∂A

Exemples : 1. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_2$

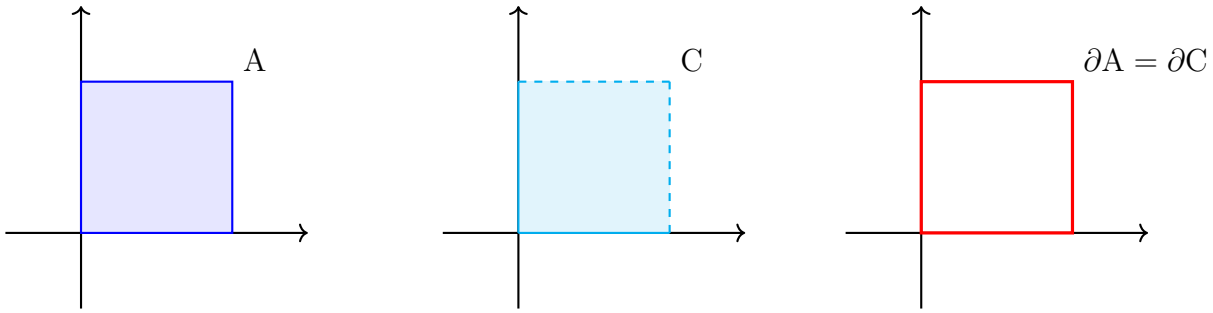


FIGURE 10 – Domaines $A = [0\,;1]^2$ et $\partial A = (\{0,1\} \times [0\,;1]) \cup ([0\,;1] \times \{0,1\})$

2. On a $\partial\mathbb{Z} = \bar{\mathbb{Z}} \setminus \mathring{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.
3. On a $\partial\,]0\,;1[= \{0,1\}$.
4. On a $\partial\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (frontière d'intérieur non vide ...).

Proposition 19. *Soit* A *une partie de* E. *On a*

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A} \qquad \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \qquad E \setminus \bar{A} = (E \setminus A)^\circ \qquad E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$$

Démonstration. On a $\bar{A}$ fermé d'où la première égalité puis $\mathring{A}$ ouvert d'où la deuxième. Puis

$$x \notin \bar{A} \iff \exists r > 0 \quad | \quad B(x,r) \subset E \setminus A \iff x \in (E \setminus A)^\circ$$

et

$$x \notin \mathring{A} \iff \forall r > 0 \qquad B(x,r) \cap E \setminus A \neq \varnothing \iff x \in \overline{E \setminus A}$$

□

Théorème 3. *Il y a invariance des notions topologiques (ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, frontière) par passage à une norme équivalente.*

Démonstration. Soient N_1, N_2 des normes équivalentes et U un ouvert pour N_1. On a $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$ avec $\alpha, \beta > 0$. Soit $x \in U$. Il existe $r > 0$ tel que $B_{N_1}(x,r) \subset U$. Par suite

$$B_{N_2}(x, r/\beta) \subset B_{N_1}(x,r) \subset U$$

Ceci prouve que U est également ouvert pour N_2. Par symétrie des rôles, deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts et donc les mêmes voisinages et par complémentation, les mêmes fermés. Pour A partie de E, on a

$$\mathring{A} = \bigcup_{V \text{ ouvert } \subset A} V \quad \text{et} \quad \bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé } \supset A} F$$

Ainsi, deux normes équivalentes définissent les mêmes intérieurs, les mêmes adhérences et les mêmes frontières de parties de E. □

Remarque : Dans la preuve, on a établi que si N_2 est plus fine de que N_1, alors un ouvert pour N_1 l'est aussi pour N_2.

Corollaire 1. *Il y a invariance des notions topologiques (ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, frontière) par rapport au choix d'une norme en dimension finie.*

Démonstration. Conséquence de ce qui précède et de l'équivalence des normes en dimension finie. □

4 Topologie relative

Définition 12. *Soit* A *une partie de* E. *On appelle* ouvert relatif *de* A *tout ensemble de la forme* $\mathrm{U}\cap\mathrm{A}$ *avec* U *ouvert de* E.

Exemple : Dans $\mathrm{A}=[-1\,;1\,[$, on a $\mathrm{O}=[-1\,;0\,[$ ouvert relatif de A car $\mathrm{O}=\,]-\infty\,;0\,[\cap\mathrm{A}$.

Définition 13. *Soit* A *une partie de* E. *On appelle* fermé relatif *de* A *tout ensemble de la forme* $\mathrm{F}\cap\mathrm{A}$ *avec* F *fermé de* E.

Exemple : Dans $\mathrm{A}=[-1\,;1\,[$, on a $\mathrm{F}=[0\,;1\,[$ fermé relatif de A car $\mathrm{F}=[0\,;1\,]\cap\mathrm{A}$.

Définition 14. *Soit* A *une partie de* E *et* $a\in\mathrm{A}$. *On appelle* voisinage de a relatif de A *tout ensemble de la forme* $\mathrm{U}\cap\mathrm{A}$ *avec* U *voisinage de* a.

Théorème 4. *Soit* A *une partie de* E *et* $\mathrm{F}\subset\mathrm{A}$. *On a*

$$\mathrm{F}\text{ fermé relatif de A}\iff\Big(\forall(x_n)_n\in\mathrm{F}^{\mathbb{N}}\qquad(x_n)_n\text{ convergente dans A}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}x_n\in\mathrm{F}\Big)$$

Démonstration. Soit $\mathrm{F}\subset\mathrm{A}$. Si F fermé relatif de A, on a $\mathrm{F}=\mathrm{G}\cap\mathrm{A}$ avec G fermé de E. Soit $(x_n)_n\in\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ convergente dans A. En particulier, la suite est à valeurs dans G d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\in\mathrm{G}\cap\mathrm{A}=\mathrm{F}$. Réciproquement, pour $x\in\bar{\mathrm{F}}\cap\mathrm{A}$, on dispose d'une suite $(x_n)_n\in\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x\in\mathrm{A}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\in\mathrm{F}$ ce qui prouve $\bar{\mathrm{F}}\cap\mathrm{A}\subset\mathrm{F}$. L'inclusion réciproque est immédiate ce qui prouve le résultat attendu. □

II Limites

Dans ce qui suit, les ensembles E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-ev normés. On note $\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions de A, partie non vide de E, dans F. C'est clairement un $\mathbb{K}$-ev.

1 Définitions

Définition 15. *Soit* $f\in\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$. *On dit que* f admet une limite en $a\in\bar{\mathrm{A}}$ *s'il existe* $\ell\in\mathrm{F}$ *tel que*

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists\eta>0\quad|\quad\forall x\in\mathrm{A}\quad\|x-a\|\leqslant\eta\quad\Longrightarrow\quad\|f(x)-\ell\|\leqslant\varepsilon$$

Une telle limite, si elle existe, est unique.

Notation : On note $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$ ou $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$.

Remarques : (1) Définition identique avec des inégalités strictes (on passe de strict en ε, η à large en ε, $\eta/2$ et de large en ε, η à strict en η, 2ε).
(2) L'unicité est immédiate. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites candidates, on a pour $x\in\mathrm{A}$

$$\|\ell_1-\ell_2\|\leqslant\|\ell_1-f(x)\|+\|f(x)-\ell_2\|$$

qui peut être rendu arbitrairement petite.
(3) Si f admet une limite en $a\in\mathrm{A}$, alors celle-ci est $f(a)$ (prendre $x=a$ dans la définition).

Définition 16. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$ avec* A *une partie non bornée de* E. *On dit que* f admet une limite pour $\|x\| \to +\infty$ *s'il existe* $\ell \in \mathrm{F}$ *tel que*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{M} \geqslant 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{A} \quad \|x\| \geqslant \mathrm{M} \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Une telle limite, si elle existe, est unique.

Notation : On note $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} \ell$.

Définition 17. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$ avec $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ partie non majorée (respectivement non minorée). On dit que* f admet une limite pour $x \to +\infty$ *(resp. $x \to -\infty$) s'il existe $\ell \in \mathrm{F}$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{M} \geqslant 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{A} \quad x \geqslant \mathrm{M} \text{ (resp. } x \leqslant -\mathrm{M}) \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Une telle limite, si elle existe, est unique.

Notation : On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$, de même pour $-\infty$.

Définition 18. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$. On dit que* f tend vers $+\infty$ en $a \in \bar{\mathrm{A}}$ *si*

$$\forall \mathrm{M} \geqslant 0 \qquad \exists \eta > 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{A} \quad \|x - a\| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant \mathrm{M}$$

Notation : On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Remarque : De la même manière, on définit $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} \pm\infty$.

Les résultats qui suivent peuvent être étendus au cas d'existence de limite si $x \to \pm\infty$ ou $\|x\| \to +\infty$. On se contentera de les énoncer dans le cas $x \to a$ avec $a \in \bar{\mathrm{A}}$.

Exemple : Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_2$ et f définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$$

On a les inégalités suivantes :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x^4 + y^4 \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (x - y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$$

D'où $$f(x, y) \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2^4 \left(1 - \frac{4}{\|(x, y)\|_2^2}\right)$$

Par comparaison $$f(x, y) \xrightarrow[\|(x,y)\|_2 \to \infty]{} +\infty$$

Proposition 20 (Caractérisation séquentielle). *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$, $a \in \bar{\mathrm{A}}$ et $\ell \in \mathrm{F}$. On a*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \left(\forall (x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}} \qquad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell\right)$$

Démonstration. Identique au cas réel en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$. □

Exemples : 1. Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. La fonction f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, on a

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0, 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0, 0)$$

mais $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

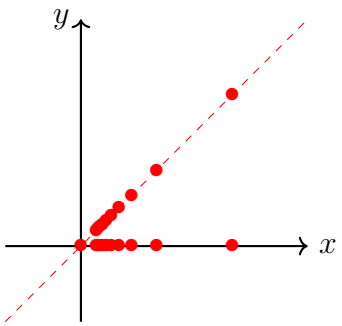


FIGURE 11 – Suites de points convergentes vers $(0,0)$

2. Soit $f(x,y) = \dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Avec l'inégalité $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, on a pour toute suite $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |f(x_n, y_n) - 0| \leqslant \frac{|x_n y_n|}{2} = o(1)$$

Par caractérisation séquentielle, on conclut

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

2 Dimension finie ou espace produit

Définition 19. *On suppose* F *de dimension finie avec* $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ *une base de* F. *Soit* $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$. *On a*

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i$$

Les p *fonctions numériques* f_i *sont appelées* fonctions coordonnées *de* f *relatives à la base* $\mathscr{B}$.

Proposition 21. *On suppose* F *de dimension finie avec* $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ *une base de* F. *Soit* $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$, $a \in \bar{\mathrm{A}}$. *On a*

$$f \text{ admet une limite en } a \iff \forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad f_i \text{ admet une limite en } a$$

Dans ce cas $$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{x\to a} f_i(x)\right) e_i$$

Démonstration. Immédiate par caractérisation séquentielle. □

Définition 20. *Soit* $(\mathrm{F}_i, \|\cdot\|)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ *une famille de* $\mathbb{K}$*-ev normés et* F *l'espace produit des* F_i. *Soit* $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$. *On a*

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad f(x) = (f_i(x))_{i\in[\![1\,;p]\!]}$$

Les p *fonctions* f_i *sont appelées* fonctions coordonnées *de* f.

Proposition 22. *Soit* $(\mathrm{F}_i, \|\cdot\|)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ *une famille de* $\mathbb{K}$*-ev normés et* F *l'espace produit des* F_i*. Soit* $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ *et* $a \in \bar{\mathrm{A}}$*. On a*

$$f \text{ admet une limite en } a \iff \forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad f_i \text{ admet une limite en } a$$

Dans ce cas $$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \Big(\lim_{x\to a} f_i(x)\Big)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$$

Démonstration. Immédiate par caractérisation séquentielle. □

3 Opérations algébriques

Proposition 23. *Soit* $f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$*,* $a \in \bar{\mathrm{A}}$ *avec* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$*. Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on a*

$$\lambda f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\ell + \ell'$$

Démonstration. Immédiate par caractérisation séquentielle. □

Proposition 24. *Soit* $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$*,* $g \in \mathscr{F}(\mathrm{B},\mathrm{G})$ *avec* $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{F}$*,* $a \in \bar{\mathrm{A}}$*. Si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ *et si* $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell$*, alors*

$$g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

Démonstration. Immédiate par caractérisation séquentielle. □

Remarque : Par caractérisation séquentielle, on remarque que $b \in \bar{\mathrm{B}}$ et l'examen de la limite de g en b fait donc sens.

Proposition 25. *Soit* $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$*,* $g \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathbb{K})$*,* $a \in \bar{\mathrm{A}}$ *avec* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda$*. On a*

$$(gf)(x) = g(x)f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\ell$$

Démonstration. Immédiate par caractérisation séquentielle. □

III Continuité

Dans ce qui suit, les ensembles E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-ev normés et A une partie non vide de E.

1 Définitions, propriétés

Définition 21. *Soit* $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$*. On dit que* f *est* continue en $a \in \mathrm{A}$ *si*

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

La fonction f *est dite* continue sur A *si elle continue en tout point de* A.

Notation : On note $\mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions continues de A dans F.

Proposition 26. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ et $a \in \mathrm{A}$. On a*

$$f \text{ continue en } a \iff \left(\forall (x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)\right)$$

Démonstration. Par caractérisation séquentielle des limites. □

Proposition 27. *On suppose* F *de dimension finie avec $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ une base de* F. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ et $a \in \mathrm{A}$. On a :*

$$f \text{ continue en } a \iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad f_i \text{ continue en } a$$

Démonstration. Par caractérisation séquentielle. □

Remarque : On dispose du même résultat pour une fonction à valeurs dans un produit d'espaces normés.

Théorème 5. *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ continue. L'image réciproque d'un ouvert de* F *par f est un ouvert de* E. *L'image réciproque d'un fermé de* F *par f est un fermé de* E.

Démonstration. Soit U ouvert de F et $x_0 \in f^{-1}(\mathrm{U})$. Comme $f(x_0) \in \mathrm{U}$, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon) \subset \mathrm{U}$. Par continuité de f en x_0, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \implies \underbrace{\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon}_{f(x)\in \mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\subset \mathrm{U}}$$

d'où $\mathrm{B}(x_0,\eta) \subset f^{-1}(\mathrm{U})$ ce qui prouve que $f^{-1}(\mathrm{U})$ ouvert. Soit V fermé de F. On a

$$f^{-1}(\mathrm{V}) = f^{-1}\left(\mathrm{F} \setminus (\mathrm{F} \setminus \mathrm{V})\right) = \mathrm{E} \setminus f^{-1}\left(\mathrm{F} \setminus \mathrm{V}\right)$$

Le résultat suit. □

⚠ **Avertissement :** Ce théorème s'utilise avec une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ où E et F sont des espaces vectoriels normés.

Exemple : $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi x)$, on a $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathbb{Z} = f^{-1}(\{0\})$.

Remarques : (1) Le résultat est faux pour l'image directe.
On a $\sin([\,0\,;2\pi\,[) = [\,-1\,;1\,]$. Posant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{th}\,(x)$, on a $f([\,0\,;+\infty\,[) =]\,-1\,;1\,[$.
(2) La réciproque du théorème est vraie mais ne figure pas au programme officiel.

Théorème 6. *Soient $f, g : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ continues. Si f et g coïncident sur* A *(i.e. $f_{|\mathrm{A}} = g_{|\mathrm{A}}$) une partie dense de* E, *alors $f = g$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $(x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Par suite

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to+\infty} x_n) = g(x)$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Exemple : Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour x réel, on a $f(x) = f\left(\dfrac{2x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Si f s'annule en a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(x-a+a) = f(x-a)f(a) = 0$$

On s'intéresse aux fonctions non nulles d'où $f(1) > 0$ et $f(0) > 0$. On a $f(0) = f(0)^2$ d'où $f(0) = 1$ puis $1 = f(x-x) = f(x)f(-x)$ pour x réel d'où $f(-x) = f(x)^{-1}$. Par récurrence, on obtient $f(kx) = f(x)^k$ pour tout k entier relatif et x réel puis

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \qquad f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)^q \quad \text{et} \quad f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f(p) = f(1)^p$$

D'où $$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \qquad f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{\frac{p}{q}}$$

Ainsi, les fonctions f et $x \mapsto f(1)^x$ coïncident sur $\mathbb{Q}$ partie dense de $\mathbb{R}$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(1)^x$$

Réciproquement, de telles fonctions $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$ sont effectivement solutions.

Remarque : L'hypothèse de continuité est indispensable. Si on l'omet, on peut construire à l'aide de bases de Hamel (bases de $\mathbb{R}$ en tant $\mathbb{Q}$-ev dont l'existence requiert l'axiome du choix) des solutions qui ne coïncident pas avec une fonction puissance sur $\mathbb{R}$.

2 Uniforme continuité

Définition 22. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$. On dit que f est* uniformément continue *sur* A *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \quad | \quad \forall (x,y) \in \mathrm{A}^2 \qquad \|x-y\| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Remarque : Le choix de η ne dépend que de ε, pas d'un point particulier de A.

Proposition 28. *L'uniforme continuité implique la continuité en tout point.*

Démonstration. Immédiate. □

Définition 23. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$. On dit que f est* lipschitzienne *s'il existe $k \geqslant 0$ tel que*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{A}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x-y\|$$

Proposition 29. *Une application lipschitzienne est uniformément continue et donc continue.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, on choisit $\eta = \varepsilon/(k+1)$ et le résultat suit. □

Proposition 30. *Une norme sur* E *est une application* 1*-lipschitzienne pour* E *muni de cette norme.*

Démonstration. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. Par inégalité triangulaire inverse, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$$

ce qui est le résultat attendu. □

Application : Une boule ouverte est un ouvert. Pour $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$, on a

$$\mathrm{B}(a,r) = \mathrm{d}(\cdot,a)^{-1}(]-\infty\,;r\,[)$$

et l'application $\mathrm{d}(\cdot,a)$ est 1-lipschitzienne. On peut appliquer le même procédé aux boules fermées et au sphères.

Proposition 31. *Soit* A *partie non vide de* E. *L'application* $x \mapsto \mathrm{d}(x,\mathrm{A})$ *est* 1*-lipschitzienne.*

Démonstration. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathrm{A} \quad \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\| &\implies \forall a \in \mathrm{A} \quad \mathrm{d}(x,\mathrm{A}) \leqslant \|x-y\| + \|y-a\| \\ &\implies \mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - \|x-y\| \leqslant \mathrm{d}(y,\mathrm{A}) \end{aligned}$$

d'où $$\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - \mathrm{d}(y,\mathrm{A}) \leqslant \|x-y\|$$

Le résultat suit par symétrie des rôles. □

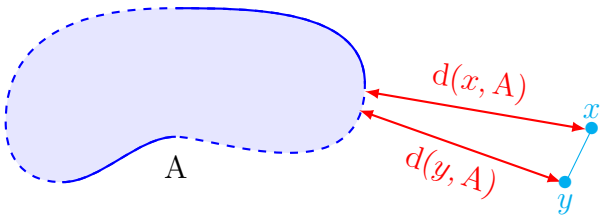


FIGURE 12 – Distance à une partie 1-lipschitzienne

Proposition 32. *Soit* n *entier. La fonction* $z \mapsto z^n$ *est continue sur* $\mathbb{C}$ *et la fonction* $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ *est continue sur* $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. On pose

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = z^n \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad g(z) = \frac{1}{z}$$

On suppose n non nul sinon c'est trivial. Soit $\mathrm{R} \geqslant 0$. Pour $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$u^n - v^n = (u-v)\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k}$$

d'où $$\forall (u,v) \in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})^2 \quad |f(u)-f(v)| \leqslant |u-v| \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|u|^k\,|v|^{n-1-k}}_{\leqslant \mathrm{R}^{n-1}} \leqslant n\mathrm{R}^{n-1}\,|u-v|$$

La fonction f est lipschitzienne sur $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ pour tout $\mathrm{R} \geqslant 0$ donc continue. Puis, soit $z_1 \in \mathbb{C}^*$. On choisit $\varepsilon = \dfrac{|z_1|}{2} > 0$. Par inégalité triangulaire inverse, on a

$$\forall z \in \mathrm{B}(z_1,\varepsilon) \quad |z| \geqslant \big||z-z_1| - |z_1|\big| \geqslant |z_1| - \underbrace{|z-z_1|}_{\leqslant |z_1|/2} \geqslant \frac{|z_1|}{2}$$

Ainsi $$\forall (u,v) \in \mathrm{B}(z_1,\varepsilon)^2 \quad |g(u)-g(v)| = \frac{|v-u|}{|u|\,|v|} \leqslant \frac{4}{|z_1|^2}\,|u-v|$$

La fonction g est donc localement lipschitzienne donc continue sur $\mathbb{C}^*$. □

3 Opérations algébriques

Proposition 33. *L'ensemble* $\mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ *est un sev de* $\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$.

Démonstration. Par opérations sur les limites. □

Proposition 34. *Soient* $f \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ *et* $g \in \mathscr{C}(\mathrm{B},\mathrm{G})$ *avec* $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. *Alors, on a* $g \circ f \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{G})$.

Démonstration. Par opérations sur les limites. □

Proposition 35. *Soient* $f \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{F})$, $g \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathbb{K})$, *alors* $gf \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{F})$.

Démonstration. Par opérations sur les limites. □

Application : Soient f, g dans $\mathscr{C}(\mathrm{A},\mathbb{K})$ avec g qui ne s'annule pas. Alors, on a $f/g \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathbb{K})$ puisque

$$\frac{f}{g} = f \cdot \left(u \in \mathbb{K}^* \mapsto \frac{1}{u}\right) \circ g$$

Définition 24. *On appelle* fonction polynomiale *sur* $\mathbb{K}^p$ *tout élément de* $\mathrm{Vect}\left\{x = (x_1,\dots,x_p) \mapsto \prod_{i=1}^{p} x_i^{\alpha_i}, (\alpha_i) \in \mathbb{N}^p\right\}$.
On appelle fonction rationnelle *sur* $\mathbb{K}^p$ *toute fonction s'écrivant comme quotient de deux fonctions polynomiales sur* $\mathbb{K}^p$.

Théorème 7. *Les fonctions polynomiales définies sur* $\mathbb{K}^p$ *sont continues sur* $\mathbb{K}^p$.
Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition, i.e. là où leur dénominateur ne s'annule pas.

Démonstration. On munit $\mathbb{K}^p$ de $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, L'application $x \mapsto x_i$ est continue car lipschitzienne puisqu'on a $|x_i - y_i| \leqslant \|x-y\|_\infty$ pour x, y dans $\mathbb{K}^p$. Les fonctions puissances sont continues sur $\mathbb{K}$ donc par composition, les $x \mapsto x_i^{\alpha_i}$ sont continues. Enfin, par produit, l'application $x \mapsto \prod_{i=1}^{p} x_i^{\alpha_i}$ est continue sur $\mathbb{K}^p$. Par combinaison linéaire, les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{K}^p$. Puis le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est continue d'où le résultat pour les fonctions rationnelles. □

Exemples : 1. Les fonctions définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{P}_1(x,y) = x \qquad \mathrm{P}_2(x,y) = x^2+y^2 \qquad \mathrm{P}_3(x,y) = xy + y^3$$

sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$.

2. On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{R}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a R continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fonction rationnelle bien définie sur ce domaine. Puis, avec $|xy| \leqslant (x^2+y^2)/2$, il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |\mathrm{R}(x,y) - \mathrm{R}(0,0)| \leqslant \frac{|xy|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Par comparaison, il s'ensuit que R est continue en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$ entier.

⚠ **Remarque :** La continuité selon toute droite passant par $(0,0)$ ne garantit pas la continuité en $(0,0)$.

3. Considérons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $f(0,y) = 0$ pour tout $y \neq 0$ puis, pour $y = ax$ avec $a \neq 0$, on a

$$f(x,ax) = \frac{a^2x^3}{x^2+a^4x^4} = \frac{a^2x}{1+a^2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Toutefois, la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, on a

$$\forall x \neq 0 \qquad f(x^2,x) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

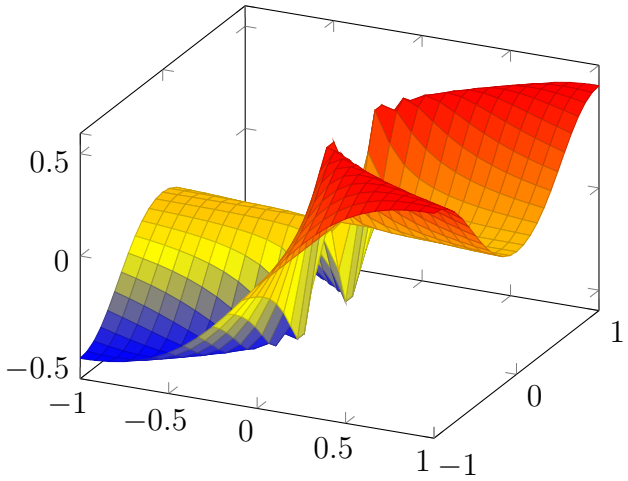


FIGURE 13 – Tracé de $z = f(x,y)$

4. On pose $\forall (x,y) \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

Notons $\Delta = \{(x,x), x > 0\}$. On a $f \in \mathscr{C}(\left]0\,;+\infty\right[^2 \setminus \Delta, \mathbb{R})$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $(x,y) \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \setminus \Delta$, on peut écrire

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln(y/x)}{y/x-1}$$

On voit apparaître l'expression d'une fonction d'une variable évaluée en y/x. Posons

$$\forall t > 0 \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(t)}{t-1} & \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Par construction, on a $\varphi \in \mathscr{C}^0(\left]0\,;+\infty\right[, \mathbb{R})$. Par ailleurs, on a

$$\forall (x,y) \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \qquad f(x,y) = \frac{1}{x} \times \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

L'égalité est immédiate hors de Δ mais elle vaut également pour tout point de Δ. Or, la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{x} \times \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[^2$ par composition ce qui prouve

$$\boxed{f \in \mathscr{C}(]\,0\,;+\infty\,[^2, \mathbb{R})}$$

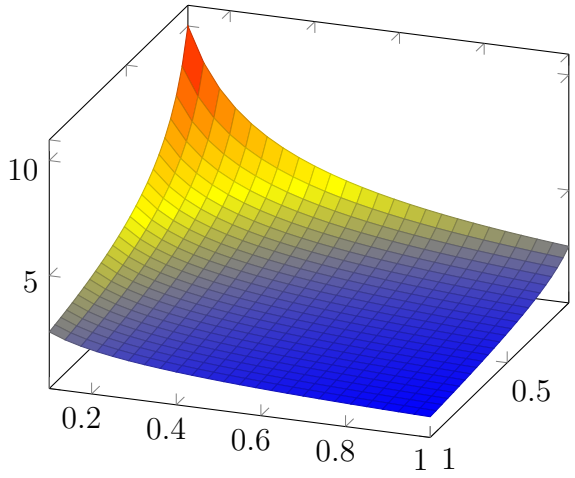


FIGURE 14 – Tracé de $z = f(x,y)$

5. L'application $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), (\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ est continue puisque $(\mathrm{AB})_{i,j}$ est polynomiale en les coefficients de A et de B.

6. L'application det : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est polynomiale en les coefficients de la matrice donc continue en ces coefficients.

Application importante : L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ par une application continue. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_k = \mathrm{A} - \dfrac{1}{k}\mathrm{I}_n$. On a $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{A}$ et comme χ_A admet un nombre fini de racines, alors $\chi_\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{k}\right) \neq 0$ pour k suffisamment grand ce qui prouve que la suite $(\mathrm{A}_k)_k$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang.

Variante pour la densité : On dispose de P, Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$. On pose $\mathrm{B}_k = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{I}_r, \frac{1}{k}\mathrm{I}_{n-r})\mathrm{Q}$ pour $k \geqslant 1$. On a clairement $(\mathrm{B}_k)_k$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{A}$ par continuité du produit matriciel.

4 Applications linéaires, multilinéaires continues

Théorème 8. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. L'application u est continue si et seulement s'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u(x)\| \leqslant \mathrm{C}\|x\|$$

Démonstration. Le sens indirect est immédiat puisque, par linéarité de u, on trouve u C-lipschitzienne donc (uniformément) continue. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de u en zéro, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad \|y\| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \|u(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. On a $\quad \|u(x)\| = \|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\eta\right)\| \times \dfrac{\|x\|}{\eta} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\eta}\|x\|$

et l'inégalité vaut aussi pour $x = 0_\mathrm{E}$. □

Notation : On note $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Théorème 9. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec* E *de dimension finie. L'application u est continue.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ une base de E. On choisit $\| \ \|_{\infty,\mathscr{B}}$. Il vient

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u(x)\| = \sum_{i=1}^{p} |x_i| \, \|u(e_i)\| \leqslant \mathrm{C}\|x\|_{\infty,\mathscr{B}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \sum_{i=1}^{p} \|u(e_i)\| \geqslant 0$$

On conclut avec le théorème précédent et l'équivalence des normes. □

Remarques : (1) Si l'espace E est de dimension finie, on a donc $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathscr{L}_c(\mathrm{E}) = \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
(2) Le résultat est faux en dimension infinie. Considérons $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \psi(f) = f(1) \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) = t^n$$

L'application ψ est clairement linéaire et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(f_n) = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui prouve que ψ est discontinue en 0. En munissant de la norme $\| \cdot \|_\infty$, l'application ψ devient continue. Il n'y a pas d'incohérence puisque les deux normes considérées ne sont pas équivalentes.
(3) On pourrait aussi reprendre l'exemple qui suit le théorème 2. Si φ est continue, alors $\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé ce qui n'est pas d'où la discontinuité de φ.

Définition 25. *Soit $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On définit la* norme subordonnée *ou* norme d'opérateur *de u notée $\|u\|_{\mathrm{op}}$ ou $|||u|||$ par*

$$\|u\|_{\mathrm{op}} = |||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

Remarque : Pour $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$, la quantité $\|u\|_{\mathrm{op}}$ est bien définie : on dispose de $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que $\|u(x)\| \leqslant \mathrm{C}\|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ d'où $\|u(x)\| \leqslant \mathrm{C}$ pour tout $x \in \mathrm{S}(0_\mathrm{E},1)$ et l'ensemble $\{\|u(x)\|, x \in \mathrm{S}(0_\mathrm{E},1)\}$ est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure finie.

Proposition 36. *Soit $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On a*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u(x)\| \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}}\|x\|$$

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on a $\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\| \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}}$ d'où $\|u(x)\| \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}}\|x\|$ et le résultat vaut toujours pour $x = 0_\mathrm{E}$. □

Proposition 37. *Soient $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}_c(\mathrm{F},\mathrm{G})$. On a*

$$\|v \circ u\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|v\|_{\mathrm{op}}\|u\|_{\mathrm{op}}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{E}$ avec $\|x\| = 1$. On a

$$\|v \circ u(x)\| \leqslant \|v\|_{\mathrm{op}} \|u(x)\| \leqslant \|v\|_{\mathrm{op}} \|u\|_{\mathrm{op}}$$

Le résultat suit. □

Théorème 10. *Soit $(\mathrm{E}_i, \|\cdot\|)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une famille de $\mathbb{K}$-ev normés, E l'espace produit des E_i et u application n-linéaire de E dans F. L'application u est continue si et seulement s'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que*

$$\forall x = (x_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \qquad \|u(x)\| \leqslant \mathrm{C} \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Démonstration. Cas bilinéaire. Si l'application u est continue, elle l'est en particulier en $(0_{\mathrm{E}_1}, 0_{\mathrm{E}_2})$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \qquad \max(\|x\|, \|y\|) \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \|u(x,y)\| \leqslant \varepsilon$$

Pour x et y non nuls, on a

$$\|u(x,y)\| = \|u\left(\eta\frac{x}{\|x\|}, \eta\frac{y}{\|y\|}\right)\| \frac{\|x\|\|y\|}{\eta^2} \leqslant \mathrm{C}\|x\|\|y\| \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \frac{\varepsilon}{\eta^2}$$

et l'inégalité vaut aussi si x ou y est nul. Réciproquement, soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$. Pour $(x,y) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$, il vient

$$\begin{aligned}\|u(x,y) - u(x_0,y_0)\| &= \|u(x,y) - u(x_0,y) + u(x_0,y) - u(x_0,y_0)\| \\ &\leqslant \|u(x-x_0,y)\| + \|u(x_0,y-y_0)\| \leqslant \mathrm{C}\left(\|x-x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y-y_0\|\right)\end{aligned}$$

Ainsi $$u(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} u(x_0,y_0)$$

□

Corollaire 2. *Soit $(\mathrm{E}_i, \|\cdot\|)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une famille de $\mathbb{K}$-ev normés de dimensions finies, E l'espace produit des E_i et u application n-linéaire de E dans F. L'application u est continue.*

Démonstration. Cas bilinéaire. Soient $\mathscr{B}_1 = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $\mathscr{B}_2 = (\varepsilon_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ des bases respectives de E_1 et E_2. Pour $(x,y) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$, on note

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{q} y_j \varepsilon_j$$

Par bilinéarité, il vient

$$u(x,y) = u\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i, \sum_{j=1}^{q} y_j\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q} x_i y_j u(e_i, \varepsilon_j)$$

d'où $$\|u(x,y)\| \leqslant \|x\|_{\infty,\mathscr{B}_1} \|y\|_{\infty,\mathscr{B}_2} \sum_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q} \|u(e_i,\varepsilon_j)\|$$

Le résultat suit par équivalence des normes. □

Exemple : On retrouve le fait que le produit matriciel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), (\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ est continue en tant qu'application bilinéaire sur un produit d'espaces de dimension finie.

IV Compacité

1 Définitions, propriétés

Définition 26. *Une partie* K *de* E *est dite* compacte *(ou est un* compact*) si toute suite à valeurs dans* K *possède au moins une valeur d'adhérence dans* K*, i.e.*

$$\forall (x_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}} \qquad \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ extractrice} \quad | \quad x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$$

Remarques : Il s'agit de la *propriété de Bolzano-Weierstrass.*
L'ensemble vide est un compact de E.

Exemples : 1. Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.
2. $\mathbb{R}$ n'est pas compact puisque la suite $(n)_n$ n'admet pas de valeur d'adhérence.
3. $[\,0\,;1\,[$ n'est pas compact puisque la suite $(1-1/n)_{n\geqslant 1}$ admet une unique valeur d'adhérence qui n'appartient pas à $[\,0\,;1\,[$.

Théorème 11. *Une partie compacte de* E *est un fermé borné.*

Démonstration. Soit K un compact. Supposons K non borné. On peut alors trouver une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans K telle que $\|x_n\| \geqslant n$ pour tout n entier. Toute suite extraite de $(x_n)_n$ est nécessairement divergente car non bornée ce qui contredit le caractère compact. Il s'ensuit que K est borné. Soit $(x_n)_n$ à valeurs dans K convergente. Il existe φ tel que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge dans K. Or, une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence (qui est sa limite) d'où $(x_n)_n$ converge dans K ce qui prouve que K est fermé. □

Théorème 12. *Soit* K *un compact de* E *et* F *un fermé inclus dans* K*. Alors* F *est compact.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$. En particulier, on a $(x_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$. Par compacité de K, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge dans K. Comme F est fermé, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in \mathrm{F}$. Ainsi, toute suite à valeurs dans F admet une valeur d'adhérence. □

Théorème 13. *Une suite à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Le sens direct est immédiat puisqu'une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence. Réciproquement, soit $(x_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$ avec K compact admettant une unique valeur d'adhérence. Notons x cette valeur d'adhérence. Supposons que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\not\longrightarrow} x$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists p \geqslant n \quad | \quad \|x_p - x\| \geqslant \varepsilon$$

Notant $p(n)$ un entier choisi tel que $p(n) \geqslant n$ et $\|x_{p(n)} - x\| \geqslant \varepsilon$, on construit ψ en posant $\psi(0) = p(0)$ puis pour n entier

$$\psi(n+1) = \min\{p(k), k > \psi(n)\}$$

La suite extraite $(x_{\psi(n)})_n$ ainsi construite est telle que $\|x_{\psi(n)} - x\| \geqslant \varepsilon$. Mais la suite $(x_{\psi(n)})_n$ est à valeurs dans K donc admet une valeur d'adhérence qui est donc valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ et qui n'est pas x d'après la minoration précédente. Ceci contredit l'unicité de la valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. On conclut que $(x_n)_n$ converge. □

Proposition 38. *Soient* $\mathrm{K}_1, \dots, \mathrm{K}_p$ *des compacts d'espaces normés* $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$. *Alors* $\mathrm{K} = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{K}_i$ *est un compact de* $\mathrm{E} = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i$.

Démonstration. Soit $(x_{1,n}, \dots, x_{p,n})_n$ une suite de $\mathrm{K}^{\mathbb{N}}$. En particulier $(x_{1,n})_n$ est à valeurs dans K_1 compact donc il existe une extractrice φ_1 tel que $(x_{1,\varphi_1(n)})_n$ converge dans K_1. Puis, la suite $(x_{2,\varphi_1(n)})_n$ est à valeurs dans K_2 compact donc il existe une extractrice φ_2 tel que $(x_{2,\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_n$ converge dans K_2. Ainsi, la suite $(x_{1,\varphi_1\circ\varphi_2(n)}, x_{2,\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_n$ converge dans $\mathrm{K}_1 \times \mathrm{K}_2$. On itère ce procédé et on construit la suite $(x_{1,\psi(n)}, \dots, x_{p,\psi(n)})_n$ convergente dans K avec $\psi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p$. □

2 Continuité et compacité

Dans ce qui suit, les ensembles E et F désignent des $\mathbb{K}$-ev normés.

Théorème 14. *Soit* $f : \mathrm{K} \to \mathrm{F}$ *continue et* K *un compact de* E. *Alors* $f(\mathrm{K})$ *est un compact de* F.

Démonstration. On suppose K non vide sinon il n'y a rien à faire. Soit $(y_n)_n \in f(\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists x_n \in \mathrm{K} \quad | \quad y_n = f(x_n)$$

et $(x_n)_n$ est à valeurs dans le compact K d'où l'existence de φ tel que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Par continuité de f, il vient

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

d'où la compacité de $f(\mathrm{K})$. □

Théorème 15 (Théorème des bornes atteintes). *Soit* $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ *continue et* K *un compact non vide de* E. *Alors la fonction* f *atteint son maximum et son minimum sur* K, *i.e.*

$$\exists (a,b) \in \mathrm{K}^2 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{K} \qquad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

Démonstration. L'ensemble $f(\mathrm{K})$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi, les bornes supérieures et inférieures de f sur K sont bien définies. Par caractérisation séquentielle, on a

$$\exists (a_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}} \quad | \quad f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf f(\mathrm{K}) \quad \text{et} \quad \exists (b_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}} \quad | \quad f(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup f(\mathrm{K})$$

Par fermeture de $f(\mathrm{K})$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \in f(\mathrm{K}) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \in f(\mathrm{K})$$

d'où $$\exists (a,b) \in \mathrm{K}^2 \quad | \quad f(a) = \inf f(\mathrm{K}) \quad \text{et} \quad f(b) = \sup f(\mathrm{K})$$

□

Théorème 16 (Théorème de Heine). *Soit* $f : \mathrm{K} \to \mathrm{F}$ *continue et* K *un compact de* E. *Alors la fonction* f *est uniformément continue sur* K, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \quad | \quad \forall (x,y) \in \mathrm{K}^2 \qquad \|x - y\| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists (x,y) \in \mathrm{K}^2 \quad | \quad \|x-y\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \|f(x)-f(y)\| > \varepsilon$$

En particulier, pour n entier non nul, on dispose de $(x_n, y_n) \in \mathrm{K}^2$ tel que

$$\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$$

Par extraction, il existe φ tel que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$ et par conséquent $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ également. Par continuité de f et de la norme, on a

$$\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f(x) - f(x)\| = 0$$

ce qui est impossible. On conclut que f est uniformément continue sur K.

Variante. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$\mathrm{A}_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathrm{K}^2 \ : \ \|f(x)-f(y)\| \geqslant \varepsilon\}$$

et $$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2 \qquad g(x,y) = \|f(x)-f(y)\| \qquad h(x,y) = \|x-y\|$$

On vérifie sans difficulté que les applications g et h sont continues sur K^2 compact comme produit fini de compacts. Par caractérisation séquentielle, on établi la fermeture de A_ε qui est donc compact comme fermé dans le compact K^2. On suppose A_ε non vide. Ainsi, l'application h atteint son minimum sur A_ε en un couple (x_0, y_0) avec $x_0 \neq y_0$ puisque $f(x_0) \neq f(y_0)$ et notant $\eta = \min_{\mathrm{A}_\varepsilon} h$, on a donc

$$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2 \qquad \|f(x)-f(y)\| \geqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|x-y\| \geqslant \eta$$

La contraposée donne le résultat attendu. Si l'ensemble A_ε est vide, l'implication annoncée est vraie (pour n'importe quel choix de η). □

3 Compacité en dimension finie

On rappelle le *théorème de Bolzano-Weierstrass* :

Théorème 17. *Toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{K}$ admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. On suppose qu'elle à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$. On définit la suite $(a_n, b_n)_n$ et l'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $(a_0, b_0) = (a, b)$, $\varphi(0) = 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) & \text{si } \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in [\,a_n\,;c_n\,]\} \text{ infini} \\ (c_n, b_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

et $$\varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \mid x_k \in [\,a_{n+1}\,;b_{n+1}\,]\}$$

Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes de limite ℓ et par encadrement, on a $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Notant $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ pour n entier, les suites réelles $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont bornées. Il existe donc φ_1 une extractrice telle que $(x_{\varphi_1(n)})_n$ converge puis une autre extractrice φ_2 telle que $(y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_n$ converge. Notant $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, la suite $(z_{\varphi(n)})_n$ converge. □

Corollaire 3. *Les compacts de $\mathbb{K}$ sont exactement les fermés bornés de $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Soit K un fermé borné de $\mathbb{K}$. Soit $(x_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge. Comme K est un fermé, la limite appartient à K ce qui prouve que K est compact. □

Théorème 18. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-evn de dimension finie. Les compacts de* E *sont exactement les fermés bornés de* E.

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ une base de E. Soit K un fermé borné de E et $(x_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$. On note $x_n = \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}e_i$ pour tout n entier. Les suites coordonnées $(x_{i,n})_n$ sont bornées puisque $(x_n)_n$ l'est, d'où $(x_{1,n},\dots,x_{p,n})_n$ à valeurs dans $\mathrm{B}_f(0,r)^p$ (avec $r \geqslant 0$ choisi suffisamment grand) qui est un compact comme produit fini de compacts du corps $\mathbb{K}$. Ainsi, il existe φ telle que $(x_{1,\varphi(n)},\dots,x_{p,\varphi(n)})_n$ converge dans $\mathrm{B}_f(0,r)^p$. Par conséquent, $(x_{\varphi(n)})_n$ converge et cette suite est à valeurs dans K fermé d'où la convergence dans K ce qui prouve que K est compact. □

Remarque : Si l'espace E est muni de $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$, l'équivalence des normes n'est pas invoquée.

Exemple important : L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On définit $$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M}\in\mathrm{E} \mid \mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n\right\}$$

On munit E du produit scalaire : $\mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^\top\mathrm{B}\right)$. La norme euclidienne est la norme $\|\cdot\|_2$. On a clairement $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0_\mathrm{E}, \sqrt{n})$ d'où le caractère borné. Soit $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$. On a $(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})_{i,j}$ polynomiale en les coefficients de M pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$ d'où $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{E})$. Par suite, le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ est un fermé de E. Il s'agit donc d'un fermé borné dans un espace de dimension finie d'où le résultat.

Exemple : On pose

$$\forall (s,t)\in[\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s \\ s(1-t) & \text{sinon} \end{cases}$$

On observe $$\forall (s,t)\in[\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = \min(s,t)\,(1-\max(s,t))$$

La fonction K est continue comme composée de telles fonctions et par conséquent, elle atteint ses bornes sur le compact $[\,0\,;1\,]^2$, compact car fermé borné de l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension finie. On remarque

$$\forall (s,t)\in[\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t)\geqslant 0 \quad\text{et}\quad \mathrm{K}(s,t) = 0 \iff (s,t)\in\{0,1\}\times[\,0\,;1\,]\cup[\,0\,;1\,]\times\{0,1\}$$

puis $$\forall (s,t)\in[\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) \leqslant \max(s,t)\,(1-\max(s,t)) \leqslant \operatorname*{Max}_{u\in[\,0\,;1\,]} u(1-u) = \frac{1}{4}$$

et $$\mathrm{K}(s,t) = \frac{1}{4} \iff \max(s,t) = \min(s,t) = \frac{1}{2} \iff s = t = \frac{1}{2}$$

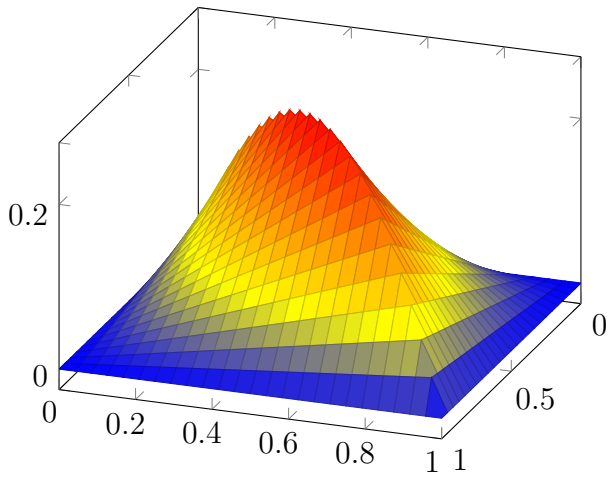


FIGURE 15 – Tracé de $z = \mathrm{K}(s,t)$

Théorème 19. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-evn de dimension finie. Une suite bornée de* E *converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de E. Elle est donc à valeurs dans une boule fermée $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{M})$ avec $\mathrm{M} \geqslant 0$ qui est un compact car un fermé borné en dimension finie. D'après le théorème 13, le résultat suit. □

V Connexité par arcs

1 Définitions

Définition 27. *On appelle* chemin continu *joignant deux points* a, b *de* E *une application* $\varphi : [0\,;1] \to \mathrm{E}$ *continue vérifiant* $\varphi(0) = a$ *et* $\varphi(1) = b$*. On dit que* a *et* b *sont* reliés *par un chemin continu.*

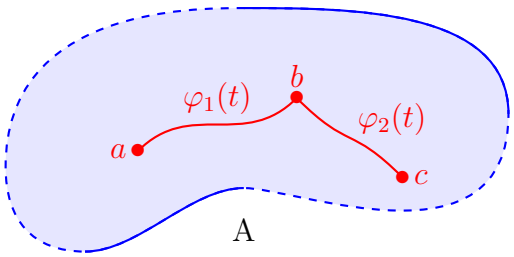
Proposition 39. *Soit* A *une partie de* E*. La relation entre deux points de* A *par un chemin continu à valeurs dans* A *est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Avec $a \in \mathrm{A}$ et $\varphi : t \mapsto a$, la relation est réflexive. Avec $a, b \in \mathrm{A}$ et φ un chemin dans A continu les reliant, on considère $t \mapsto \varphi(1-t)$ pour établir que la relation est symétrique.

Soient a, b, c dans A, φ_1 un chemin continu dans A reliant a et b et φ_2 un chemin continu dans A reliant b et c. On pose

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \varphi_1(2t) & \text{si } t \in [0\,;1/2] \\ \varphi_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2\,;1] \end{cases}$$

On a φ continue sur $[0\,;1]$ à valeurs dans A et reliant a à c ce qui prouve que la relation est transitive.



□

Définition 28. *Soit* A *une partie de* E*. Les classes d'équivalence pour la relation entre deux points de* A *par un chemin continu à valeurs dans* A *sont appelées* composantes connexes par arcs *de* A*.*

Définition 29. *Une partie de* A *de* E *est dite* connexe par arcs *si, pour tout couple* $(a,b) \in \mathrm{A}^2$, *il existe un chemin continu à valeurs dans* A *et joignant ces deux points.*

Remarque : L'ensemble vide est connexe par arcs.

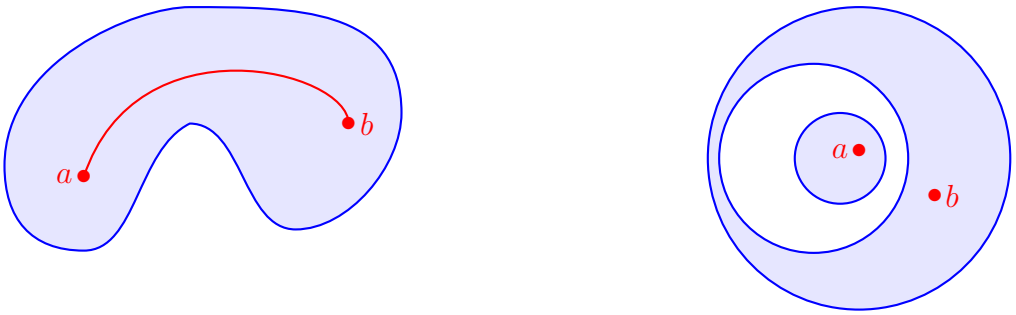


FIGURE 16 – Ensembles connexe par arcs et non connexe par arcs

Exemples : 1. L'ensemble $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.
Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{*2}$. On note $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ avec $r_1, r_2 > 0$ et θ_1, θ_2 réels. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = r_1^{1-t} r_2^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}((1-t)\theta_1 + t\theta_2)}$$

qui est un chemin continu reliant z_1 à z_2 à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

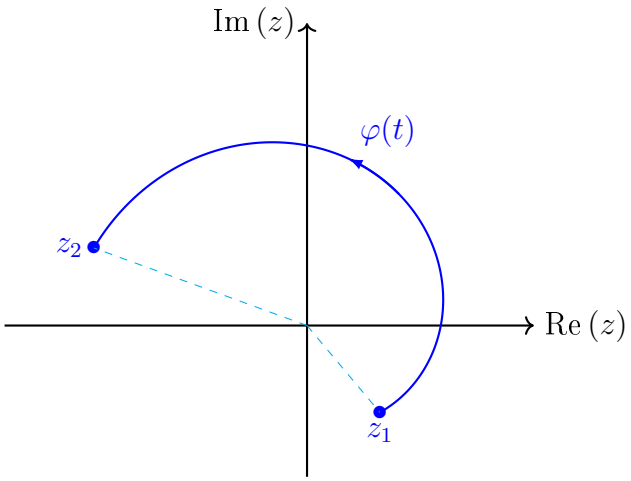


FIGURE 17 – Chemin reliant z_1 à z_2 dans $\mathbb{C}^*$

2. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs.
Sinon, il existe $\varphi \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R}^*)$ avec $\varphi(0) = -1$, $\varphi(1) = 1$ chemin qui relie -1 à 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il vient

$$[\,-1\,;1\,] = [\,\varphi(0)\,;\varphi(1)\,] \subset \varphi([\,0\,;1\,]) \subset \mathbb{R}^*$$

ce qui implique $0 \in \mathbb{R}^*$ qui est bien sûr faux.

2 Propriétés

Le $\mathbb{K}$-ev E peut être vu comme $\mathbb{R}$-ev (cadre de la convexité).

Proposition 40. *Toute partie convexe de* E *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit C un convexe de E et $(a,b) \in C^2$. Il suffit alors de considérer $\varphi(t) = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \|\varphi(t) - \varphi(s)\| = \|b-a\|\,|t-s|$$

d'où φ continue puis $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ et φ à valeurs dans C par convexité. □

Exemples : Les intervalles de $\mathbb{R}$ (parties convexes de $\mathbb{R}$) sont connexes par arcs.
Les intervalles $]\,0\,;+\infty\,[$ et $]\,-\infty\,;0\,[$ sont les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$. En effet, notant $C(x)$ la classe de x réel non nul pour la relation par un chemin continu à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on a $C(1) \cap C(-1) = \varnothing$ et $C(1) \sqcup C(-1) \subset \mathbb{R}^*$ et on vérifie sans difficulté $]\,0\,;+\infty\,[\subset C(1)$ et $]\,-\infty\,;0\,[\subset C(-1)$. On en déduit $C(1) =]\,0\,;+\infty\,[$ et $C(-1) =]\,-\infty\,;0\,[$.

Définition 30. *Une partie de* A *de* E *est dite* étoilée *s'il existe un point* $a \in A$ *tel que tout point* $x \in A$, *on a* $[\,a\,;x\,] \subset A$.

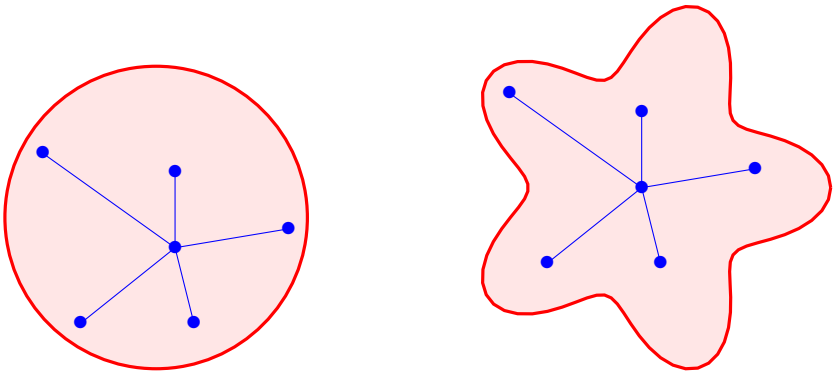


FIGURE 18 – Ensembles étoilés

Proposition 41. *Toute partie étoilée est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit A étoilée en a. Pour $(x,y) \in A^2$, on a $[\,x\,;a\,] \subset A$ d'où x relié à a dans A par convexité de $[\,x\,;a\,]$ puis $[\,a\,;y\,] \subset A$ d'où a relié à y dans A par convexité de $[\,a\,;y\,]$ et par transitivité, il vient x relié à y dans A. □

Remarques : (1) Dans certains cas, montrer qu'une partie est étoilée est une stratégie plus simple pour établir la connexité par arcs que d'affronter directement cette propriété (choix d'un élément remarquable pour le caractère étoilé).
(2) Une partie peut être connexe par arcs sans être étoilée comme $\mathbb{C}^*$ par exemple.

Exemple : L'ensemble $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ est étoilé en $(1,0)$. Soit $(x,y) \in \Omega$. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = (1-t)(1,0) + t(x,y) = (1-t+tx, ty)$$

On a $\varphi(0) = (1,0) \in \Omega$. Si $y \neq 0$, alors $ty \neq 0$ d'où $\varphi(t) \in \Omega$ pour $t \in]\,0\,;1\,]$. Si $y = 0$, alors $x > 0$ et on a

$$\forall t \in]\,0\,;1\,] \qquad 1-t+tx \geqslant tx > 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) \in \Omega$$

L'ensemble Ω est donc étoilé et par conséquent, il est connexe par arcs.

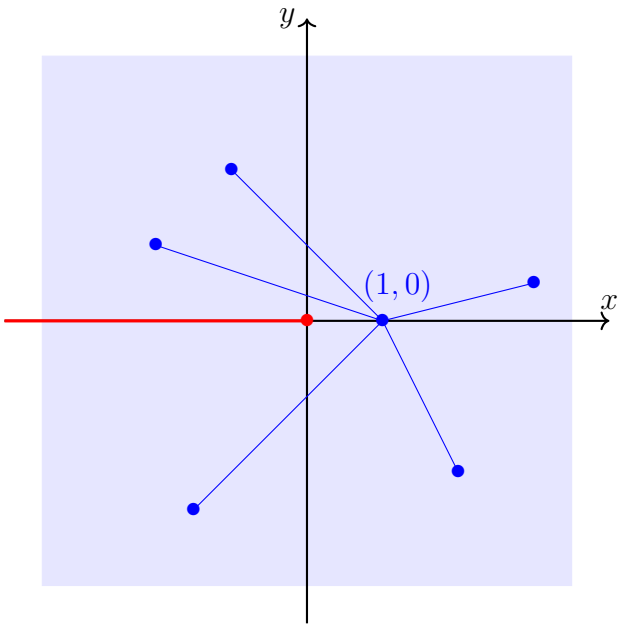


FIGURE 19 – Ensemble Ω étoilé en $(1,0)$

3 Continuité et connexité par arcs

Théorème 20. *L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.*

Démonstration. Immédiate. □

Exemples : 1. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs puisque $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs (on a clairement $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^*$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la matrice $\mathrm{diag}(\lambda, \mathrm{I}_{n-1})$ est un antécédent par det).
2. L'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ est connexe par arcs comme image de $[\,0\,;2\pi\,]$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Théorème 21. *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.*

Démonstration. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes donc connexes par arcs. Réciproquement, soit I partie de $\mathbb{R}$ connexe par arcs. Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a \leqslant b$. Il existe $\varphi \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathrm{I})$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$[\,a\,;b\,] = [\,\varphi(0)\,;\varphi(1)\,] \subset \varphi([\,0\,;1\,]) \subset \mathrm{I}$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Annexes

Équivalence des normes en dimension finie

Théorème 22. *Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et on pose $\|x\|_{\infty,\mathscr{B}} = \operatorname{Max}_{i \in [\![1\,;p]\!]} |x_i|$. Montrons que toute norme N est équivalente à $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(x) = \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i|\,\mathrm{N}(e_i) \leqslant \beta \|x\|_{\infty,\mathscr{B}} \quad \text{avec} \quad \beta = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{N}(e_i)$$

Comme les e_i ne sont pas nuls puisqu'ils sont les vecteurs d'une base, on a $\mathrm{N}(e_i) > 0$ d'où $\beta > 0$ ce qui prouve une des inégalités attendues.

On considère E muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$. Par inégalité triangulaire inverse, on a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad |\mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)| \leqslant \mathrm{N}(x-y) \leqslant \beta \|x-y\|_{\infty,\mathscr{B}}$$

Ainsi, l'application N est β-lipschitzienne donc continue. Comme l'espace E de dimension finie est muni de $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$, on a équivalence entre le caractère borné d'une suite avec ses suites coordonnées sans utiliser l'équivalence des normes (qu'on souhaite démontrer...). On en déduit la compacité du fermé borné $\mathrm{S}(0,1)$ (sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{B},\infty}$). D'après le théorème des bornes atteintes, l'application N atteint sa borne inférieure sur $\mathrm{S}(0,1)$, *i.e.* on dispose de $x_0 \in \mathrm{S}(0,1)$ tel que

$$\operatorname{Inf}_{x \in \mathrm{S}(0,1)} \mathrm{N}(x) = \mathrm{N}(x_0)$$

Comme x_0 n'est pas nul, on a par séparation $\alpha = \mathrm{N}(x_0) > 0$. Puis, il vient pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$

$$\mathrm{N}\left(\frac{x}{\|x\|_{\infty,\mathscr{B}}}\right) \geqslant \alpha$$

autrement dit

$$\mathrm{N}(x) \geqslant \alpha \|x\|_{\infty,\mathscr{B}}$$

et cette dernière inégalité vaut aussi pour $x = 0_\mathrm{E}$. On a donc établi

$$\exists (\alpha,\beta) \in \left]\, 0\,;+\infty \,\right[^2 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \alpha \|x\|_{\infty,\mathscr{B}} \leqslant \mathrm{N}(x) \leqslant \beta \|x\|_{\infty,\mathscr{B}}$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Théorème 10. *Soit $(\mathrm{E}_i, \|\cdot\|)_{i \in [\![1\,;n]\!]}$ une famille de $\mathbb{K}$-ev normés, E l'espace produit des E_i et u application n-linéaire de E dans F. L'application u est continue si et seulement s'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que*

$$\forall (x_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \qquad \|u(x)\| \leqslant \mathrm{C} \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Démonstration. Si l'application u est continue, elle l'est en particulier en $(0,\dots,0)$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathrm{E} \qquad \forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad \|x_i\| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \|u(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \varepsilon$$

Pour $x_1, \dots, x_n$ non nuls, on a

$$\|u(x)\| = \|u\left(\eta\frac{x_1}{\|x_1\|},\dots\right)\|\frac{\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|}{\eta^n} \leqslant \mathrm{C}\prod_{i=1}^{n}\|x_i\| \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \frac{\varepsilon}{\eta^n}$$

Réciproquement, soit $x = (x_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ et $y = (y_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ dans $\prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}_i$. On pose

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad z_k = (x_1,\dots,x_{k-1},y_k,\dots,y_n)$$

On a $\quad u(x)-u(y) = \sum_{k=1}^{n}[u(z_k)-u(z_{k+1})] = \sum_{k=1}^{n}u(x_1,\dots,x_{k-1},x_k-y_k,y_{k+1},\dots,y_n)$

Ainsi $$\|u(x)-u(y)\| \leqslant \mathrm{C}\|x-y\|_\infty\sum_{k=1}^{n}\|x\|_\infty^{k-1}\|y\|_\infty^{n-k}$$

D'où $$u(x) \xrightarrow[x\to y]{} u(y)$$

□

Corollaire 2. *Soit $(\mathrm{E}_i,\|\cdot\|)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une famille de $\mathbb{K}$-ev normés de dimensions finies, E l'espace produit des E_i et u application n-linéaire de E dans F. L'application u est continue.*

Démonstration. On note $\mathscr{B}_i = (e_{i,1},\dots,e_{i,p_i})$ une base de E_i. Soit $x = (x_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}_i$. On note

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad x_i = \sum_{k_i=1}^{p_i}x_{i,k_i}e_{i,k_i}$$

Puis $$u(x) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\prod_{i=1}^{n}[\![1\,;p_i]\!]}\prod_{i=1}^{n}x_{i,k_i}u(e_{1,k_1},\dots,e_{n,k_n})$$

Ainsi $\quad \|u(x)\| \leqslant \mathrm{C}\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|_{\infty,\mathscr{B}_i}$ avec $\mathrm{C} = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\prod_{i=1}^{n}[\![1\,;p_i]\!]}\|u(e_{1,k_1},\dots,e_{n,k_n})\| \geqslant 0$

Le résultat suit par équivalence des normes en dimension finie. □