ISM MP, Mathématiques
Année 2026/2027

Feuille d'exercices n°33

Exercice 1 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(A^p)_p$ bornée. Pour p entier non nul, on pose $B_p = \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Montrer que la suite $(B_p)_{p\geqslant 1}$ admet une valeur d'adhérence B.
2. Montrer que la matrice B vérifie $B(I_n - A) = 0$.
3. En déduire que B est la matrice de projection sur $\mathrm{Ker}\,(A-I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(A-I_n)$.
4. Conclure sur le comportement asymptotique de $(B_p)_{p\geqslant 1}$.

Corrigé : 1. La suite $(B_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée car $(A^p)_p$ l'est. Ainsi, il existe une extractrice φ telle que

$$\boxed{B_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} B}$$

2. Par téléscopage, il vient $\qquad B_p(I_n - A) = \dfrac{1}{p}(I_n - A^p)$

d'où $\qquad \|B(I_n - A)\| \leqslant \dfrac{1}{p}\left(\|I_n\| + \|A^p\|\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\qquad B_p(I_n - A) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

et par continuité du produit matriciel

$$B_{\varphi(p)}(I_n - A) \xrightarrow[p\to+\infty]{} B(I_n - A)$$

Par unicité de la limite, on conclut $\qquad \boxed{B(I_n - A) = 0}$

3. On vérifie sans difficulté

$$\mathrm{Ker}\,(A - I_n) \subset \mathrm{Ker}\,(B - I_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(A - I_n) \subset \mathrm{Ker}\ B$$

Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A-I_n) \cap \mathrm{Im}\,(A-I_n)$. On a $AX = X$ d'où $B_{\varphi(p)}X = X$ et faisant tendre $p \to +\infty$, il vient $BX = X$ par continuité du produit matriciel. On a également $BX = 0$ d'où $X = 0$ et avec le théorème du rang, on obtient

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}\,(A - I_n)$$

Les sev $\mathrm{Ker}\,(B-I_n)$ et $\mathrm{Ker}\ B$ étant clairement en somme directe, il vient pour raison de dimension

$$\mathrm{Im}\,(A - I_n) = \mathrm{Ker}\ B \qquad \mathrm{Ker}\,(A - I_n) = \mathrm{Ker}\,(B - I_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\ B \oplus \mathrm{Ker}\,(B - I_n)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La matrice B est matrice de projection sur } \mathrm{Ker}\,(A - I_n) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}\,(A - I_n).}$$

4. La suite $(B_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée dans une espace de dimension finie avec pour unique valeur d'adhérence la matrice B précédemment décrite. On conclut

$$\boxed{B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} B}$$

Exercice 2 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, X une partie compacte non vide de E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Soit $a \in \mathrm{X}$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que l'application f est une isométrie, *i.e.*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

3. Montrer que l'application f est une bijection de X sur X.

Corrigé : 1. Par récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|x - y\| \leqslant \|f^k(x) - f^k(y)\|$$

d'où $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \|u_n - u_0\| \leqslant \|f^k(u_n) - f^k(u_0)\| = \|u_{n+k} - u_k\|$$

La suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans X compact donc il existe φ une extractrice telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ converge dans X. On définit ψ sur $\mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+1) = \min\left\{\varphi(k),\ k > 2\psi(n)\right\}$$

D'après le résultat préliminaire, pour n entier

$$\|u_{\psi(n+1)-\psi(n)} - u_0\| \leqslant \|u_{\psi(n+1)} - u_{\psi(n)}\|$$

Il s'ensuit $$u_{\psi(n+1)-\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Enfin, par construction, on a $\psi(n+1) > 2\psi(n)$ pour n entier d'où

$$\psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) > \psi(n) \leqslant 0$$

ce qui prouve la stricte croissance de $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ qui est donc une extractrice. Ainsi

$$\boxed{\text{La valeur } a \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n)_n.}$$

Remarque : L'extractrice $\psi(\cdot + 1) - \psi$ est complètement déterminée par le choix de φ.

2. Soit $(a,b) \in \mathrm{X}^2$. On construit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ comme précédemment. L'espace X^2 est compact comme produit d'espaces compacts. Ainsi, la suite $(u_n, v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence et avec le même procédé que celui vu précédemment, on construit une extractrice χ telle que

$$u_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \text{et} \quad v_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

Par ailleurs, comme $\chi(n) \geqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, il vient

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \|f(a) - f(b)\| \leqslant \|f^{\chi(n)-1}(f(a)) - f^{\chi(n)}(f(b))\| = \|u_{\chi(n)} - v_{\chi(n)}\|$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a - b\|$ et l'autre inégalité est vraie par hypothèse. Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une isométrie.}}$$

3. Comme f est une isométrie, elle est injective et continue. Comme X est compact, l'ensemble $f(\mathrm{X})$ est compact. D'après le résultat de la première question, on a $\mathrm{X} \subset \overline{f(\mathrm{X})}$ et comme $f(\mathrm{X})$ est compact donc fermé, il s'ensuit que $\mathrm{X} \subset f(\mathrm{X}) = \overline{f(\mathrm{X})}$. L'autre inclusion étant vraie par hypothèse, on a $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une bijection de X sur X.}}$$

Exercice 3 (***)

Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \mathrm{F}$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soient $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ des points du plan $\mathbb{R}^2$ et A, B dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n\}$. On note $\overrightarrow{a_i}$ un vecteur normalisé directeur de (AM_i) et de même $\overrightarrow{b_i}$ un vecteur normalisée directeur de (BM_i). On choisit $\overrightarrow{u}$ normalisé hors de $\left\{\pm\overrightarrow{a_1}, \ldots, \pm\overrightarrow{a_n}\right\}$ puis $\overrightarrow{v}$ normalisé hors de $\left\{\pm\overrightarrow{u}, \pm\overrightarrow{b_1}, \ldots, \pm\overrightarrow{b_n}\right\}$ (choix possibles car les ensembles à exclure sont finis). Ainsi, les droites $\mathrm{A} + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $\mathrm{B} + \overrightarrow{v}$ sont sécantes en un point C et ne rencontrent aucun des M_i. Par conséquent, on peut définir le chemin

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \mathrm{A} + 2t\mathrm{AC}\overrightarrow{u} & \text{si } t \in \left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right] \\ \mathrm{C} + (2t-1)\mathrm{CB}\overrightarrow{v} & \text{si } t \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right] \end{cases}$$

Le chemin est continu, relie A à B et est à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n\}$. Considérant les affixes de ces points, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{C} \setminus \mathrm{F} \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact de E et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ *localement lipschitzienne*, *i.e.* pour tout $a \in \mathrm{K}$, il existe un voisinage V_a de a et une constante $\mathrm{C}_a > 0$ tels que

$$\forall (x,y) \in (\mathrm{V}_a \cap \mathrm{K})^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \mathrm{C}_a \|x - y\|$$

Montrer que f est en fait lipschitzienne.

Corrigé : Supposons f non-lipschitzienne sur K. Alors, pour tout n entier, il existe x_n et y_n dans K tels que

$$\|f(x_n) - f(y_n)\| > n\|x_n - y_n\|$$

On remarque en particulier que $x_n \neq y_n$ pour tout n entier sans quoi l'inégalité ne serait pas stricte. La fonction f est continue sur K donc bornée. Ainsi, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{B}_f(0, \mathrm{M})$ et par conséquent

$$\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{2\mathrm{M}}{n}$$

d'où

$$\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Comme $(x_n)_n$ est à valeurs dans le compact K, il existe φ extractrice telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$ et de même $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Or, il existe un voisinage V_x tel que

$$\forall (a,b) \in (\mathrm{V}_x \cap \mathrm{K})^2 \qquad \|f(a) - f(b)\| \leqslant \mathrm{C}_x \|a - b\|$$

Or, à partir d'un certain rang, les suites $(x_\varphi(n))_n$ et $(y_{\varphi(n)})_n$ sont à valeurs dans V_x d'où

$$\varphi(n)\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| < \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \leqslant \mathrm{C}_x \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|$$

Enfin, comme on sait que $x_n \neq y_n$ pour tout n entier, en divisant par $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|$, on en déduit notamment $\varphi(n) < \mathrm{C}_x$ pour tout n entier ce qui est absurde puisque $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est lipschitzienne.}}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, F un sev fermé et G un sev de dimension finie. Montrer que $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ fermé.

Corrigé : Supposons $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(a)$ avec $a \notin \mathrm{F}$ sinon le résultat est trivial. Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Pour n entier, il existe $(t_n, \lambda_n) \in \mathrm{F} \times \mathbb{K}$ tel que $x_n = t_n + \lambda_n a$. Si $(\lambda_n)_n$ est bornée, il existe φ extractrice telle que $\lambda_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathbb{K}$. Par suite, on a

$$t_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \lambda_{\varphi(n)} a \xrightarrow[n\to\infty]{} t = x - \lambda a$$

avec $t \in \mathrm{F}$ par fermeture de F. On en déduit $x = t + \lambda a \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Si $(\lambda_n)_n$ n'est pas bornée, il existe ψ extractrice telle que $\lambda_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Par suite, comme $(x_n)_n$ converge, alors $x_n = \mathrm{O}(1)$ et par fermeture de F, on trouve

$$\frac{t_{\psi(n)}}{\lambda_{\psi(n)}} = \frac{x_n}{\lambda_{\psi(n)}} - a \xrightarrow[n\to\infty]{} -a \in \mathrm{F}$$

ce qui est absurde. On en déduit $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ fermé pour le cas $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(a)$ et on procède par récurrence immédiate pour G de dimension finie. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{F} + \mathrm{G} \text{ est fermé.}}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On rappelle que pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, l'enveloppe convexe de X notée Conv(X) vérifie

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Si E est de dimension n, alors tout élément de Conv(X) peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X (théorème de Carathéodory, voir feuilles de convexité). Montrer que dans ce cas, si X est compact, alors Conv(X) est compact.

Corrigé : Posons $\mathrm{K} = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \quad | \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}$

L'ensemble K est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ espace de dimension finie d'où K compact. On note

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1} \longrightarrow \mathrm{E} \\ (\alpha, x) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \end{cases}$$

Soient (α, x) et (β, y) dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha, x) - \Phi(\beta, y)\| &= \|\Phi(\alpha, x) - \Phi(\alpha, y) + \Phi(\alpha, y) - \Phi(\beta, y)\| \\ &\leqslant \|\alpha\|_1 \|x - y\|_\infty + \|y\|_1 \|\alpha - \beta\|_\infty \end{aligned}$$

et la continuité de Φ s'en déduit. Puis, on observe que

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \Phi(\mathrm{K} \times \mathrm{X}^{n+1})$$

Or, l'ensemble $\mathrm{K} \times \mathrm{X}^{n+1}$ est compact comme produit de compacts et l'image d'un compact par une application continue étant compact, on conclut

$$\boxed{\text{Si X est compact dans E un } \mathbb{R}\text{-ev de dimension } n, \text{ alors Conv(X) est compacte.}}$$

Exercice 7 (***)

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *cyclique* s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Vect}\,(X, AX, \dots, A^{n-1}X) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

Montrer que l'ensemble des matrices cycliques $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense connexe par arcs.

Corrigé : Soit $A \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}\,(X, AX, \dots, A^{n-1}X) = n$. On pose

$$\Phi\colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ M \longmapsto \det(X, MX, \dots, M^{n-1}X) \end{cases}$$

L'application Φ est polynomiale en les coefficients de M donc continue. On a $\Phi(A) \neq 0$ et par conséquent, l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathbb{C}^*)$, ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue, est un voisinage ouvert de A dans $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à valeurs propres simples. Soit $M \in \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de diagonalisation. On pose $x = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. On obtient

$$\det_{\mathscr{B}}(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

en reconnaissant un déterminant de Vandermonde. La famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est donc une base de $\mathbb{C}^n$ ce qui prouve que M est cyclique. Autrement dit, on a

$$\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C}) \subset \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$$

Comme l'ensemble $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (vu en TD), la densité de $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ en résulte. Enfin, on a

$$A \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C}) \iff \exists (P, a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \quad | \quad A = PC(a_0, \dots, a_{n-1})P^{-1}$$

où $C(a_0, \dots, a_n)$ désigne la matrice compagne du polynôme $X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Il suffit en effet de considérer $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A avec $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathscr{L} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$ et d'écrire $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}} u$. Ainsi, posant

$$\Psi\colon \begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ (P, a_0, \dots, a_{n-1}) \longmapsto P^{-1}C(a_0, \dots, a_{n-1})P \end{cases}$$

On a $$\Psi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n) = \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$$

C'est l'image d'un produit de deux connexes par arcs par une application continue. On conclut

L'ensemble $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense connexe par arcs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.