ISM MP, Mathématiques
Année 2026/2027

Feuille d'exercices n°33

Exercice 1 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(A^p)_p$ bornée. Pour p entier non nul, on pose $B_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Montrer que la suite $(B_p)_{p\geqslant 1}$ admet une valeur d'adhérence B.
2. Montrer que la matrice B vérifie $B(I_n - A) = 0$.
3. En déduire que B est la matrice de projection sur $\mathrm{Ker}\,(A-I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(A-I_n)$.
4. Conclure sur le comportement asymptotique de $(B_p)_{p\geqslant 1}$.

Indications : 1. Observer que la suite $(B_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée.
2. Pour p entier non nul, calculer $B_p(I_n - A)$ et en déduire la limite de $(B_p(I_n - A))_{p\geqslant 1}$.

3. Établir $$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}\,(A - I_n)$$

On pourra considérer $X \in \mathrm{Ker}\,(A-I_n) \cap \mathrm{Im}\,(A-I_n)$ puis calculer $B_{\varphi(p)}X$ et faire tendre $p \to +\infty$.

En déduire $$\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Im}\,(A - I_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(B - I_n) = \mathrm{Ker}\,(A - I_n)$$

4. Observer que la suite $(B_p)_{p\geqslant 1}$ admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 2 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, X une partie compacte non vide de E et $f : X \to X$ telle que

$$\forall (x, y) \in X^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Soit $a \in X$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que l'application f est une isométrie, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in X^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

3. Montrer que l'application f est une bijection de X sur X.

Indications : 1. Minorer $\|f^k(x) - f^k(y)\|$ pour $(x, y) \in X^2$ puis considérer $\|u_{\psi(n+1)-\psi(n)} - u_0\|$ avec ψ extractrice adaptée.
2. Pour $(a, b) \in X^2$, utiliser des suites construites comme précédemment.
3. Montrer $X = \overline{f(X)} = f(X)$.

Exercice 3 (***)

Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.

Indications : Pour $M_1, \ldots, M_n$ des points du plan $\mathbb{R}^2$ et A, B dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{M_1, \ldots, M_n\}$, montrer qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qu'on peut choisir normés tels que les droites $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $B + \overrightarrow{v}$ soient sécantes en un point C et ne rencontrent aucun des M_i.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact de E et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ *localement lipschitzienne*, *i.e.* pour tout $a \in \mathrm{K}$, il existe un voisinage V_a de a et une constante $\mathrm{C}_a > 0$ tels que

$$\forall (x, y) \in (\mathrm{V}_a \cap \mathrm{K})^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \mathrm{C}_a \|x - y\|$$

Montrer que f est en fait lipschitzienne.

Indications : Supposer f non lipschitzienne sur K et considérer des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ à valeurs dans K vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f(x_n) - f(y_n)\| > n\|x_n - y_n\|$$

puis observer que f est bornée sur K. Établir ensuite une contradiction.

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, F un sev fermé et G un sev de dimension finie. Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ fermé.

Indications : Procéder par récurrence. Pour $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(a)$ avec $a \notin \mathrm{F}$, considérer $(x_n)_n \in (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\mathbb{N}}$ convergente avec $x_n = t_n + \lambda_n a$ et montrer que $(\lambda_n)_n$ est nécessairement bornée.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On rappelle que pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, l'enveloppe convexe de X notée Conv(X) vérifie

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Si E est de dimension n, alors tout élément de Conv(X) peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X (théorème de Carathéodory, voir feuilles de convexité). Montrer que dans ce cas, si X est compact, alors Conv(X) est compact.

Indications : Considérer $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1} \to \mathrm{E}, (\alpha, x) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$ et K l'ensemble des $n+1$-uplets de réels positifs dont la somme vaut 1.

Exercice 7 (***)

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *cyclique* s'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{AX}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

Montrer que l'ensemble des matrices cycliques $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense connexe par arcs.

Indications : Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$, considérer $\Phi : \mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{X}, \mathrm{MX}, \ldots, \mathrm{M}^{n-1}\mathrm{X})$. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ matrice diagonalisable à valeurs propres simples, montrer que M est cyclique puis utiliser la densité de $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Remarquer enfin que A est cyclique si et seulement elle est semblable à une matrice compagne.